3.2 Wave Sobolev spaces

In der Vorlesung über dispersive Gleichungen haben wir die Bourgain-Räume

$$X_{s,b} := X_{s,b}(\varphi) := \{ u \in S'(\mathbb{R}^{n+1}) : \|u\|_{X_{sb}(\varphi)} < \infty \}$$

eingeführt, deren Norm gegeben ist durch

$$\|u\|_{X_{sb}(\varphi)} := \| U_\varphi(-\cdot) u \|_{H^b_t H^s_x} ,$$

wobei $U_\varphi(t) := \mathcal{F}_x^{-1} e^{it\varphi(\xi)} \mathcal{F}_x$ die von dem (Pseudo-)Differentialoperator $i\varphi(-i\nabla) = \mathcal{F}_x^{-1} i\varphi(\xi) \mathcal{F}_x$ erzeugte unitäre Gruppe (auf einem beliebigen $H^s(\mathbb{R}^n)$ oder $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$) ist.

$H^b_t H^s_x$ bezeichnet dabei den anisotropen Sobolev-Raum mit Norm

$$\|u\|_{H^b_t H^s_x} := \| \langle\tau\rangle^b \langle\xi\rangle^s \hat{u} \|_{L^2_{\xi,\tau}} .$$

Schreibt man die X_{sb}-Norm aus, so ergibt sich

$$\|u\|^2_{X_{sb}(\varphi)} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle\tau\rangle^{2b} \langle\xi\rangle^{2s} | \mathcal{F}(U_\varphi(-\cdot)u)(\tau,\xi)|^2 \, d\xi \, d\tau$$

mit $\quad \mathcal{F}_x(U_\varphi(-\cdot)u)(t,\xi) = e^{-it\varphi(\xi)} \mathcal{F}_x u(t,\xi)$

und $\quad \mathcal{F}(U_\varphi(-\cdot)u)(\tau,\xi) = \mathcal{F}u(\tau+\varphi(\xi),\xi) = \hat{u}(\tau+\varphi(\xi),\xi).$

Mit der Substitution $\tau \rightsquigarrow \tau + \varphi(\xi)$ im (inneren) Integral $\int_{\mathbb{R}} \ldots d\tau$ erhält man

$$\|u\|^2_{X_{sb}(\varphi)} = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle\tau - \varphi(\xi)\rangle^{2b} \langle\xi\rangle^{2s} |\hat{u}(\tau,\xi)|^2 \, d\xi \, d\tau .$$

Diese Funktionenräume sind hervorragend geeignet zur Untersuchung semilinearer dispersiver und Wellengleichungen. Insbesondere geben sie Aufschluss darüber, wie die lokale Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems von der Struktur der Nichtlinearität abhängt (und nicht nur vom Grad der Nichtlinearität, wie beim unserem bisherigen Zugang, der nur die linearen Raum-Zeitabschätzungen verwendet.)

Gleichungen zweiter Ordnung in der Zeit sind der Behandlung mit $X_{s,b}$-Normen nicht unmittelbar zugänglich. Eine Möglichkeit besteht darin, die Glg. 2. Ordnung in System aus zwei Glg. erster Ordnung umzuwandeln, die dann die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial t} u_\pm \mp i\varphi(-i\nabla)u_\pm = \pm\frac{1}{2i}\varphi(-i\nabla)^{-1}(N(u_+ + u_-)) \tag{1}$$

haben, wobei z. B. $\varphi(\xi)=|\xi|$ für die Wellengleichung oder $\varphi(\xi)=\langle\xi\rangle$ für die KG-Gleichung ist. Man sucht dann bei der Picard-Iteration die Lösungen von

$$(\Box\,(+I))\,u = N(u) \tag{NLW/KG}$$

in der Form $u=u_+ + u_-$ mit Lösungen $u_\pm$ von (1). Diese Vorgehensweise hat Vor- und Nachteile, erscheint aber sicherlich auf den ersten Blick etwas schwerfällig zu sein. Eine Alternative besteht in der Verwendung der "Wave Sobolev Spaces" oder "hyperbolischen Sobolev-Räume":

Def. (Klainerman/Machedon 1993/95): Für $s, \theta \in \mathbb{R}$ heißen die Funktionenräume

$$H^{s,\theta} := \{ u \in S'(\mathbb{R}^{1+n}) : \|u\|_{H^{s,\theta}} < \infty \} \quad \text{mit Norm}$$

$$\|u\|_{H^{s,\theta}} := \| \langle |\tau| - |\xi| \rangle^{\theta} \langle \xi \rangle^{s} \hat{u} \|_{L^2_{\xi,\tau}} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{X}^{s,\theta} := \{ u \in H^{s,\theta} : \frac{\partial u}{\partial t} \in H^{s-1,\theta} \} \quad \text{mit Norm}$$

$$\|u\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}} := \|u\|_{H^{s,\theta}} + \| \frac{\partial u}{\partial t} \|_{H^{s-1,\theta}}$$

die "wave Sobolev spaces" zu den Parametern s und θ.

Bem.: (1) Die Bez. $H^{s,\theta}$ kann leicht mit den anisotropen Sobolevräumen $H^b_t H^s_x$ verwechselt werden, hat sich aber dennoch durchgesetzt.

(2) Im Zusammenhang mit den bilinearen Verfeinerungen der Strichartz-Abschätzungen sind uns neben dem Bessel-Potential-Operator J^s auch bereits die Fourier-Multiplikatoren

$$\Lambda^{\beta}_{\pm} = \mathcal{F}^{-1} \langle |\tau| \pm |\xi| \rangle^{\beta} \mathcal{F}$$

begegnet. Mit deren Hilfe können wir schreiben

$$\|u\|_{H^{s,\theta}} = \| J^s \Lambda^{\theta}_{-} u \|_{L^2_{xt}}$$

und haben ferner $\|u\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}} \sim \| J^{s-1} \Lambda_{+} \Lambda^{\theta}_{-} u \|_{L^2_{xt}}$,

denn $$J^s\Lambda_-^\theta u + J^{s-1}\Lambda_-^\theta \frac{\partial u}{\partial t} \sim J^{s-1}\Lambda_-^\theta\left(\mathcal{F}^{-1}(\langle\xi\rangle + |\tau|)\mathcal{F}\right)u$$
$$\sim J^{s-1}\Lambda_-^\theta\Lambda_+ u .$$

(3) Für die Fourier-Multiplikatoren können äquivalente C^∞-Ausdrücke gefunden werden, etwa für Λ_-^β:

$$|\tau|-|\xi| = \langle\tau\rangle - \langle\xi\rangle , \quad \langle x\rangle = (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}},$$

damit sind dann $J^s, \Lambda_\pm^\beta : S(\mathbb{R}^{4+1}) \to S(\mathbb{R}^{4+1})$ Isomorphismen. Ferner ist

$$J^s\Lambda_-^\theta : H^{s,\theta} \longrightarrow L^2_{xt}$$

per definitionem ein isometrischer Isomorphismus, entsprechend ist auch $\mathcal{X}^{s,\theta}$ zu L^2_{xt} isomorph. Da $S(\mathbb{R}^{4+1})$ in L^2_{xt} dicht ist, gilt dies auch für $H^{s,\theta}$ und $\mathcal{X}^{s,\theta}$ (unabhängig von s und θ).

(4) Der Übergang von $H^{s,\theta}$ zu $\mathcal{X}^{s,\theta}$ (durch Hinzunahme von $\frac{\partial u}{\partial t}$ in $H^{s-1,\theta}$) dient der Behandlung von Zeitableitungen in (DNLW) und entspricht genau unserem früheren Vorgehen in diesem Zusammenhang: Wir hatten nämlich zu diesem Zweck den Iterationsraum

$$E_s := L^\infty_T(H^s) \cap L^p_T(H^{s-\delta,q})$$

verkleinert zu $$\left\{u\in E_s : \frac{\partial u}{\partial t} \in E_{s-1}\right\}.$$

(Dass hierbei eine Zeitableitung genauso viel wiegt, wie eine x-Ableitung, ist natürlich spezifisch für die Wellen-Gleichung bzw. KG-Gleichung, und muss – für andere Gln. – BQ – oder Plattengl. – entsprechend angepasst werden.)

Satz 1 (Transfer-Prinzip): Es seien $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}$, $\theta > \frac{1}{2}$ und

$$T : H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times \dots \times H^{s_k}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$$

eine stetige k-lineare Abbildung und Y ein Funktionenraum auf $\mathbb{R}^{1+n}_{t,x}$, so dass

$$\| e^{ita} f \|_Y \leq c \| f \|_Y \qquad (2)$$

mit einer Konstante c unabhängig von $a \in \mathbb{R}$.

(a) Für ein $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in \{-1, 1\}^k$ gelte die Abschätzung

$$\| T(e^{i\varepsilon_1 tD} f_1, \dots, e^{i\varepsilon_k tD} f_k) \|_Y \lesssim \prod_{j=1}^{k} \| f_j \|_{H^{s_j}} . \qquad (3)$$

Dann ist für alle $(u_1, \dots, u_k) \in H^{s_1,\theta} \times \dots \times H^{s_k,\theta}$ mit

$$\operatorname{supp}(\widehat{u_j}) \subset \begin{cases} [0, \infty) \times \mathbb{R}^n & \text{im Fall } \varepsilon_j = 1 \\ (-\infty, 0] \times \mathbb{R}^n & \text{" \quad " } \varepsilon_j = -1 \end{cases}$$

$$\| T(u_1, \dots, u_k) \|_Y \lesssim \prod_{j=1}^{k} \| u_j \|_{H^{s_j,\theta}} \qquad (4)$$

(b) Gilt (3) für alle Vorzeichenverteilungen $\varepsilon \in \{-1, 1\}^k$, so hat man (4) für alle $(u_1, \dots, u_k) \in H^{s_1,\theta} \times \dots \times H^{s_k,\theta}$.

Bew. (von (a) für $k = 1$ und $T = I$, das enthält das wesentliche Argument. Für (b) zerlegt man $u = u_+ + u_-$, wobei $\widehat{u_+}(\tau, \xi) = \chi_{[0,\infty)}(\tau)\, \widehat{u}(\tau, \xi)$.): Man schreibt

$$u(t) = e^{it\varepsilon D} e^{-it\varepsilon D} u(t)$$

$$= c\, e^{it\varepsilon D} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \mathcal{F}_t (e^{-i\cdot\varepsilon D} u)(\tau)\, d\tau$$

$$= c \int_{\mathbb{R}} e^{it\varepsilon D} \cdot \cancel{\int_{\mathbb{R}}} e^{it\tau} g(\tau)\, d\tau, \quad g(\tau) = \mathcal{F}_t(e^{-i\cdot\varepsilon D} u)(\tau).$$

Dann ist

$$\|u\|_Y^2 \underset{\substack{(2),\\ \Delta\text{s-Ungl.}}}{\lesssim} \left(\int_{\mathbb{R}} \|e^{it\varepsilon D} g(\tau)\|_Y \, d\tau \right)^2$$

$$\underset{(3)}{\lesssim} \left(\int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{-\theta} \langle \tau \rangle^{\theta} \|g(\tau)\|_{H^s} \, d\tau \right)^2$$

$$\text{C.S.} \lesssim_\theta \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle \tau \rangle^{2\theta} \langle \xi \rangle^{2s} |\mathcal{F}_x g(\tau,\xi)|^2 \, d\xi \, d\tau$$

S. 190

mit $\mathcal{F}_x g(\tau,\xi) = \mathcal{F}(e^{-it\varepsilon D} u)(\tau,\xi) = \hat{u}(\tau + \varepsilon|\xi|, \xi)$.

Also wieder mit $\sigma = \tau + \varepsilon|\xi|$ und anschl. Umbenennung

$$\ldots = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle \tau - \varepsilon|\xi| \rangle^{2\theta} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\tau,\xi)|^2 \, d\xi \, d\tau$$

Nun haben wir die Fälle:

$\varepsilon = 1$ und $\hat{u}(\tau,\xi) = \chi_{[0,\infty)}(\tau)\hat{u}(\tau,\xi)$. Dann ist in

$\mathrm{supp}(\hat{u})$: $\tau - \varepsilon|\xi| = |\tau| - |\xi|$.

$\varepsilon = -1$ und $\hat{u}(\tau,\xi) = \chi_{(-\infty,0]}(\tau)\hat{u}(\tau,\xi)$. " " "

$\mathrm{supp}(\hat{u})$: $\tau - \varepsilon|\xi| = -|\tau| + |\xi|$. Also in beiden Fällen:

$$\ldots = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \langle |\tau| - |\xi| \rangle^{2\theta} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\tau,\xi)|^2 \, d\tau \, d\xi. \qquad \square$$

Bem.: (1) Gilt genauso, wenn (3) mit J anstelle von D bekannt ist, kann aber wg. der Äquivalenz der Normen für $|\xi|$ und $\langle \xi \rangle$ auch nichts wesentliches anderes liefern.

(2) $k = 1$, $T = I$ und $Y = L_t^\infty(H^s)$. Wegen

$$\|e^{\pm itD} u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$$ erhalten wir

$$\|u\|_{L_t^\infty(H^s)} \lesssim \|u\|_{H^{s,\theta}} \quad \text{für } \theta > \tfrac{1}{2}.$$

Da nach Bem. (3) zur Def. $S(\mathbb{R}^{n+1}) \subset H^{s,\theta}$ dicht und die Konvergenz in L^∞_t die gleichmäßige ist, haben wir für $\theta > \frac{1}{2}$ die stetigen Einbettungen

$$H^{s,\theta} \subset C_0(\mathbb{R}, H^s) \quad \text{und} \quad \mathcal{X}^{s,\theta} \subset C_0(\mathbb{R}, H^s) \cap C_0^1(\mathbb{R}, H^{s-1}).$$

Durch Interpolation mit $H^{s,0} = L^2_t(H^s_x)$ erhält man

$$H^{s,\theta} \subset L^p_t(H^s) \quad \text{für} \quad \theta > \frac{1}{2} - \frac{1}{p}.$$

Hier kann man mit einem andren Argument sogar auf die strikte Ungleichung verzichten.

(3) Ist (p,q) wave admissible und $s = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ in $n \geq 2$ Raumdimensionen oder (p,q) Schrödinger-admissible und $s = \frac{n+2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ in $n \geq 1$ Raumdimensionen, so gilt für $\theta > \frac{1}{2}$

$$\|u\|_{L^p_t L^q_x} \lesssim \|u\|_{H^{s,\theta}}.$$

Auf diese Weise erhalten die Strichartz-Abschätzungen eine Interpretation als Einbettungssätze für Wave-Sobolev-space in gemischte $L^p_t L^q_x$-Räume.

(4) Entsprechend folgen aus den bilinearen Abschätzungen von Klainerman und Foschi, dass für $\theta > \frac{1}{2}$, $\alpha_i \geq 0$

$$\|\Lambda_+^{\beta_+} \Lambda_-^{\beta_-}(uv)\|_{L^2_t(\dot{H}^{\beta_0}_x)} \lesssim \|u\|_{H^{\alpha_1,\theta}} \|v\|_{H^{\alpha_2,\theta}}.$$

Hierbei müssen $\beta_{0,\pm}, \alpha_i$ natürlich den Voraussetzungen (1) – (7) (S. 119) genügen.

(5) Schließlich kann man noch

$$\| u \|_{L^q_x L^2_t} \lesssim \| u \|_{H^{\frac{1}{q},\theta}}$$

für $\theta > \frac{1}{2}$ und $q = \frac{2(n+1)}{n-1}$ erwähnen, die sich aus dem "Local smoothing effect" aus Aufg. 20 ergibt.

Abschätzungen für die Lösungen der linearen Gln.: Recht einfach einzusehen ist diejenige für die homogene lineare Gleichung.

Lemma 1: Es seien $s\in\mathbb{R}$, $u_0\in H^s(\mathbb{R}^n)$, $u_1\in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$,

$$u(t)=\cos(tD)u_0+D^{-1}\sin(tD)u_1$$

und $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(\chi)\subset(-2,2)$ und $\chi(t)=1\ \forall\, |t|\le 1$.

Dann gilt $\|\chi(t)u\|_{X^{s,\theta}}\lesssim_{\chi,\theta}\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^{s-1}}$.

Bew.: $\|e^{\pm itD}u_0\|^2_{H^{s,\theta}}=\cancel{\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\langle\tau\rangle^{2\theta}\langle\xi\rangle^{2s}|\hat\chi(\tau\mp|\xi|)\hat u_0(\xi)|^2\,d\xi\,d\tau}$

$$\cancel{=\int\langle\tau\rangle^{2\theta}|\hat\chi(\tau)|^2\,d\tau}$$

$$=\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\langle|\tau|-|\xi|\rangle^{2\theta}\langle\xi\rangle^{2s}\,|\hat\chi(\tau\mp|\xi|)\,\hat u_0(\xi)|^2\,d\xi\,d\tau$$

$$\underset{0\le\theta}{\le}\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\langle\tau\mp|\xi|\rangle^{2\theta}\langle\xi\rangle^{2s}\,|\text{ —''— }|^2\,d\xi\,d\tau$$

$$=\int_{\mathbb{R}}\langle\tau\rangle^{2\theta}|\hat\chi(\tau)|^2\,d\tau\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^{2s}|\hat u_0(\xi)|^2\,d\xi=C_{\chi,\theta}\|u_0\|^2_{H^s}$$

und damit $\|\chi\cos(tD)u_0\|_{H^{s,\theta}}\lesssim_{\chi,\theta}\|u_0\|_{H^s}$,

$$\|\chi\, D\sin(tD)u_0\|_{H^{s-1,\theta}}\lesssim_{\chi,\theta}\|u_0\|_{H^s}\quad\text{und}$$

$$\|\chi\cos(tD)u_1\|_{H^{s-1,\theta}}\lesssim_{\chi,\theta}\|u_1\|_{H^{s-1}}$$

Ebenso $\|\chi\, D^{-1}\sin(tD)u_1\|_{H^{s,\theta}}\lesssim_{\chi,\theta}\|u_1\|_{H^{s-1}}$, wenn $\operatorname{supp}(\hat u_1)\subset B_1(0)^c$. Den Term von $D^{-1}\sin(tD)u_1$ mit $\hat u_1=\chi_{B_1(0)}\hat u_1$ schätzen wir ab durch

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{|\xi|\le 1} |\tau|^{-2} \langle \xi \rangle^{2s} \langle |\tau| - |\xi| \rangle^{2\theta} |\hat{\chi}(\tau - |\xi|) - \hat{\chi}(\tau + |\xi|)|^2 |\hat{u}_1(\xi)|^2 d\xi d\tau$$ (198)

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}} \int_{|\xi|\le 1} \langle \tau \rangle^{2\theta} |\hat{\chi}'(y_\xi)|^2 |\hat{u}_1(\xi)|^2 d\xi$$

Nun ist $\hat{\chi}' \in S(\mathbb{R})$ und besitzt eine Majorante $\langle \tau \rangle^{-N}$,

also ... $\lesssim \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2\theta} \langle |\tau| - 1 \rangle^{-N} d\tau \cdot \int_{|\xi| \le 1} |\hat{u}_1(\xi)|^2 d\xi \lesssim \|u_1\|^2_{H^s}$,

ganz gleich, wie groß oder klein $s \in \mathbb{R}$ ist. $\square$
(Terme mit $\partial_t \chi$ erweisen sich als harmlos.)

Die Abschätzung für die Lösungen der inhomogenen Gleichung sind deutlich komplizierter, daher sei hier nur das Ergebnis angegeben:

Lemma 2: Es seien $\frac{1}{2} < \theta < 1$, $0 \le \varepsilon \le 1 - \theta$, $F \in H^{s-1, \theta+\varepsilon-1}$ und $u(t) = D^{-1} \int_0^t \sin((t-t')D) F(t') dt'$. Dann existiert zu jedem $T \in (0,1)$ ein $v \in \mathcal{X}^{s,\theta}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Für $0 \le t \le T$ ist $u(t) = v(t)$

(2) $\|v\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}} \lesssim T^{\varepsilon/2} \|F\|_{H^{s-1,\theta+\varepsilon-1}}$.

Bew.: Selberg, Thesis (1999), pp. 54–64.

Die Lösungsräume für die betrachteten Cauchy-Probleme sind die Restriktionsräume

$$\mathcal{X}^{s,\theta}_T := \{ u|_{[0,T]} : u \in \mathcal{X}^{s,\theta} \} \quad \text{mit Norm}$$

$$\|u\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}_T} := \inf \{ \|\tilde{u}\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}} : \tilde{u} \in \mathcal{X}^{s,\theta} \text{ und } \tilde{u}|_{[0,T]} = u \}$$

Bem.: Der Kern $N^{s,\theta}$ des Restriktionsoperators

$$R_{s,\theta}: \mathcal{X}^{s,\theta} \longrightarrow \mathcal{X}_T^{s,\theta}, \quad u \mapsto u|_{[0,T]} \qquad \text{(stetig!)}$$

ist ein abgeschlossener linearer Teilraum des Hilbertraums $\mathcal{X}^{s,\theta}$. Daher existiert eine orthogonale Projektion $P: \mathcal{X}^{s,\theta} \longrightarrow N^{s,\theta}$. Sei $Q := I - P$. Dann ist

$$\|u\|_{\mathcal{X}_T^{s,\theta}} = \|Q\tilde{u}\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}}$$

für jedes $\tilde{u} \in \mathcal{X}^{s,\theta}$ mit $\tilde{u}|_{[0,T]} = u$. Also ist das inf in der obigen Def. tatsächlich ein Minimum.

Nun kann man mit Hilfe der beiden linearen Abschätzungen aus den Lemmata 1 und 2 und des CMP einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz zeigen, der das Problem der lokalen Wohlgestelltheit des ~~eines~~ ~~gegebenen~~ Cauchy-Problems

$$\text{(CP)} \quad \Box u = N(u) \qquad u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$$

vollständig auf Abschätzungen der Nichtlinearität in $H^{s,\theta}$- und $\mathcal{X}^{s,\theta}$-Normen reduziert:

<u>Satz</u> 1: Zu $s \in \mathbb{R}$ gebe es ein $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, ein $\varepsilon \in (0, 1-\theta)$ und eine monoton nicht fallende, stetige Funktion $C: [0,\infty) \to [0,\infty)$, ~~~~ so dass die Abschätzungen

$$\|N(u)\|_{H^{s-1,\theta-1+\varepsilon}} \lesssim C(\|u\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}}) \|u\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}}$$

und

$$\|N(u)-N(v)\|_{H^{s-1,\theta-1+\varepsilon}} \leq C(\|u\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}}+\|v\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}})\|u-v\|_{\mathcal{X}^{s,\theta}}$$

für alle $u,v \in \mathcal{X}^{s,\theta}$ gelten. Dann gibt es genau eine Lösung $u \in \mathcal{X}^{s,\theta}_T \subset C([0,T],H^s(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T],H^{s-1}(\mathbb{R}^n))$ von (CP), deren Lebensdauer eine monoton nicht wachsende Funktion $T(\|u_0\|_{H^s}+\|u_1\|_{H^{s-1}}) > 0$ ist, und der Lösungsoperator ist Lipschitz-stetig auf Kugeln im Datenraum $H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$.

Bew. und genauere Formulierung (unter Einschluss der Aussage über "persistence of higher regularity") siehe: Selberg, Thesis (1999), Thm. 14.

Zum Abschluss der Vorlesung möchte ich noch eine Anwendung zum einen dieses allgemeinen WP-Satzes und zum anderen der bilinearen Verfeinerungen der Strichartz-Abschätzungen von Foschi und Klainerman (aus Abschnitt 2.3.2) diskutieren. Um dabei die punktweisen Abschätzungen im Fourier-Raum übersichtlich zu halten, benötige ich noch zwei grundlegende Aussagen über die $H^{s,\theta}$-Räume, die ich leider ebenfalls nur zitieren kann:

Prop. 1 ("Duality"): Es gilt $H^{-s,-\theta} \cong (H^{s,\theta})'$ im folgenden Sinne: Die Abbildung $\phi : H^{-s,-\theta} \longrightarrow H^{s,\theta}$, definiert durch (201)

$$\phi(v)[u] := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \hat{v}(\tau,\xi)\,\hat{u}(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi$$

ist ein isometrischer Isomorphismus.

Bem. (1) Wird zurückgeführt auf die Selbstdualität von $L^2_{\xi,\tau}$ mit Hilfe der Isomorphismen $\Lambda^{\pm\theta}_{-}$, $J^{\pm s}$ und $\mathcal{F}$.

(2) Im Ggs. zu den X_{sb}-Räumen sind die $H^{s,\theta}$ invariant unter komplexer Konjugation und Zeitumkehr, da τ und ξ in den Gewichten nur im Betrag vorkommen. Daher kann man ϕ (so einfach) wie oben definieren.

(3) Vgl. meine Thesis (2002), Lemma 1.3.

Prop. 2 ("Interpolation"): Es sei $T : H^{s_0,\theta_0} + H^{s_1,\theta_1} \longrightarrow S'(\mathbb{R}^{n+1})$ eine lineare Abb., so dass ihre Einschränkungen

$$T_0 : H^{s_0,\theta_0} \longrightarrow H^{\sigma_0,\vartheta_0}, \quad T_1 : H^{s_1,\theta_1} \longrightarrow H^{\sigma_1,\vartheta_1}$$

stetig sind mit Operatornormen M_0 bzw. M_1. Ferner gelte für ein $\lambda \in [0,1]$, dass

$$s = (1-\lambda)s_0 + \lambda s_1,\ \theta = (1-\lambda)\theta_0 + \lambda\theta_1;\ \sigma = (1-\lambda)\sigma_0 + \lambda\sigma_1,\ \vartheta = (1-\lambda)\vartheta_0 + \lambda\vartheta_1$$

Dann ist $T|_{H^{s,\theta}} : H^{s,\theta} \longrightarrow H^{\sigma,\vartheta}$ ebenfalls stetig mit Operatornorm $\leq M_0^{1-\lambda} M_1^{\lambda}$.

Bem.: (1) Wird mit Hilfe der FT zurückgeführt auf entsprechende Aussagen zu Interpolation gewichteter

L^p-Räumen. (Vgl. meine Thesis, Lemma 1.4)

(2) Gilt entsprechend für multilineare Abbildungen (und soll für bilineare auch unten benutzt werden).

(3) Ebenso für $\mathcal{X}^{s,\theta}$.

Satz 2: Es sei $n \geq 2$ und $Q_0(u,v) = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} - \langle \nabla u, \nabla v \rangle$. Dann ist das Cauchy-Problem

$$u(0) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n)$$

für die semilineare Wellengleichung

$$\Box u = Q_0(u,u)$$

lokal wohlgestellt (im Sinne von Satz 1) für $s > \frac{n}{2}$.

Bem.: $s_c = \frac{n}{2}$ ist in diesem Fall der kritische Sobolev-Exponent. Mit Strichartz-Abschätzungen allein könnten wir LWP in $H^s \times H^{s-1}$ für $s > \frac{n+1}{2}$ erreichen. In drei Raumdimensionen gibt es für $\Box u = (\partial_t u)^2$ ein ill-posedness-Ergebnis (Lindblad) für $s \leq 2 = \frac{n+1}{2}$.

Bew.: Es reicht zu zeigen: Zu jedem $s > \frac{n}{2}$ gibt es ein $\theta' > -\frac{1}{2}$, so dass für alle $\theta > \frac{1}{2}$ gilt

$$\| Q_0(u,v) \|_{H^{s-1,\theta'}} \lesssim \| u \|_{\mathcal{X}^{s,\theta}} \| v \|_{\mathcal{X}^{s,\theta}}$$

(Dann kann man nämlich θ so klein machen, dass noch $\theta' > \theta - 1$, also $\theta' = \theta - 1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$ gilt, und damit Satz 1 anwendbar ist.)

(1) Wir zeigen: Für $s_0 = \frac{n}{2}$ gilt die Abschätzung

$$\| Q_0(u,v) \|_{H^{s_0-1,-\theta}} \lesssim_\theta \|u\|_{\mathcal{X}^{s_0,\theta}} \|v\|_{\mathcal{X}^{s_0,\theta}} \qquad (1)$$

für jedes $\theta > \frac{1}{2}$.

(1.1) Es ist

$$\widehat{Q_0(u,v)}(\tau,\xi) = c \int_{\mathbb{R}^{n+1}_*} (\tau_1\tau_2 - \langle \xi_1,\xi_2 \rangle)\, \hat{u}(\tau_1,\xi_1)\, \hat{v}(\tau_2,\xi_2)\, d\xi_1 d\tau_1 ,$$

wobei $\tau_2 = \tau - \tau_1$, $\xi_2 = \xi - \xi_1$ und

$$\tau_1\tau_2 - \langle \xi_1,\xi_2 \rangle = \frac{1}{2} \left\{ (\tau^2 - |\xi|^2) - (\tau_1^2 - |\xi_1|^2) - (\tau_2^2 - |\xi_2|^2) \right\}$$

und daher

$$Q_0(u,v) = \frac{1}{2} \left(\Box(uv) - (\Box u)v - u\Box v \right)$$

Wir schreiben $\Box = D_+ D_-$ ($D_\pm = |\tau| \pm |\xi|$). Aufgrund der Symmetrie $u \leftrightarrow v$ reicht es zu zeigen, dass

$$\| D_+ D_- (uv) \|_{H^{s_0-1,-\theta}} \lesssim \|u\|_{\mathcal{X}^{s_0,\theta}} \|v\|_{\mathcal{X}^{s_0,\theta}} \qquad (2)$$

und $\quad \| (D_+ D_- u) v \|_{H^{s_0-1,-\theta}} \lesssim$ —— " —— $\qquad (3)$

(1.2) Die bilineare Strichartz-Abschätzung

$$\| D_x^{\beta_0} D_+^{\beta_+} D_-^{\beta_-} (e^{\pm itD} u_0 \, e^{\pm itD} v_0) \|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u_0\|_{\dot H^{\kappa_1}} \|v_0\|_{\dot H^{\kappa_2}}$$

(unabhängige Vorzeichen!) gilt unter den folgenden hinreichenden Bedingungen:

(1) $\beta_0 + \beta_+ + \beta_- + \frac{n-1}{2} = \alpha_1 + \alpha_2$

(2) $\beta_- > -\frac{n-3}{4}$ (strikte Ungl., daher entfallen (6) und (7)).

(3) $\beta_0 > -\frac{n-1}{2}$ (4) $\alpha_i \le \beta_- + \frac{n-1}{2}$ (5) $\alpha_1 + \alpha_2 \ge \frac{1}{2}$.

(1.3) Hierin können wir

$$\beta_0 = \frac{n}{2} - 1,\ \beta_+ = 1,\ \beta_- = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{n}{2}\ (= s_0)$$

wählen. Dann ergibt das Transfer-Prinzip für $\theta > \frac{1}{2}$

$$\| D_x^{s_0-1} D_+ D_-^{\frac{1}{2}} (uv) \|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u\|_{H^{s_0,\theta_1}} \|v_0\|_{H^{s_0,\theta_2}}.$$

Auch die Wahl $\beta_0 = 0,\ \beta_+ = 1,\ \beta_- = \frac{1}{2}$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{n+2}{4} \le s_0$ ist möglich, was

$$\| D_+ D_-^{\frac{1}{2}} (uv) \|_{L^2_{xt}} \lesssim \|u\|_{H^{\alpha_1,\theta}} \|v\|_{H^{\alpha_2,\theta}}$$

ergibt. Zusammen

$$\| D_+ D_-^{\frac{1}{2}} (uv) \|_{H^{s_0-1,\theta}} \lesssim \|u\|_{H^{s_0,\theta}} \|v\|_{H^{s_0,\theta}}.$$

Wegen ~~$\| D_-^{\frac{1}{2}} w \|_{H^{s_0}}$~~ $\| D_- w \|_{H^{s_0-1,-\theta}} \le \| \Lambda_-^{-\theta} D_- w \|_{H^{s_0-1,0}}$

$\le \| D_-^{\frac{1}{2}} w \|_{H^{s_0-1,0}}$ folgt (2).

(1.4) Wir wählen

$\beta_0 = 1 - \frac{n}{2},\ \beta_+ = 0,\ \beta_- = \frac{1}{2}$ und $\alpha_1 = 1 - \frac{n}{2},\ \alpha_2 = \frac{n}{2}$ <u>oder</u>

$\beta_0 = 0$ —"— " $\alpha_1 = 0$ —"—.

Dann sind die Bedingungen (1)-(5) für die bilineare Strichartz-Abschätzung erfüllt, und mit dem Transfer-

Prinzip erhalten wir für $\theta > \frac{1}{2}$:

$$\| D_x^{1-\frac{4}{2}} D_-^{\frac{1}{2}} (uv) \|_{L^2_{xt}} \lesssim \| D_x^{1-\frac{4}{2}} u \|_{H^{0,\theta}} \| v \|_{H^{\frac{4}{2},\theta}}$$

und

$$\| D_-^{\frac{1}{2}} (uv) \|_{L^2_{xt}} \lesssim \| u \|_{H^{0,\theta}} \| v \|_{H^{\frac{4}{2},\theta}}$$

zusammen also

$$\| D_-^{\frac{1}{2}} J_x^{1-\frac{4}{2}} (uv) \|_{L^2_{xt}} \lesssim \| u \|_{H^{1-\frac{4}{2},\theta}} \| v \|_{H^{\frac{4}{2},\theta}},$$

was bedeutet, dass (fixiere v!) die lineare Abbildung

$$A_v : H^{1-\frac{4}{2},\theta} \longrightarrow L^2_{xt}, \quad u \longmapsto J_x^{1-\frac{4}{2}} D_-^{\frac{1}{2}} (u \cdot v)$$

stetig ist mit Norm $\lesssim \| v \|_{H^{\frac{4}{2},\theta}}$. Dann ist auch

$$A_{\bar{v}}^* : L^2_{xt} \longrightarrow H^{\frac{4}{2}-1,-\theta}, \quad w \longmapsto (J_x^{1-\frac{4}{2}} D_-^{\frac{1}{2}} w) \cdot v$$

stetig mit gleicher Norm, also gilt die Abschätzung

$$\| (J_x^{1-\frac{4}{2}} D_-^{\frac{1}{2}} w) v \|_{H^{\frac{4}{2}-1,-\theta}} \lesssim \| w \|_{L^2_{xt}} \| v \|_{H^{\frac{4}{2},\theta}}$$

Nun wollen wir $J_x^{1-\frac{4}{2}} D_-^{\frac{1}{2}} w = D_+ D_- u$, d. h.: $w = J^{\frac{4}{2}-1} D_+ D_-^{\frac{1}{2}} u$

und wir erhalten

$$\| (D_+ D_- u) v \|_{H^{\frac{4}{2}-1,-\theta}} \lesssim \| D^+ D_-^{\frac{1}{2}} u \|_{H^{\frac{4}{2}-1,0}} \| v \|_{H^{\frac{4}{2},\theta}}$$

$$\leq \| u \|_{\mathcal{X}^{\frac{4}{2},\theta}} \| v \|_{\mathcal{X}^{\frac{4}{2},\theta}}$$

Das ist (3), und damit ist (1) gezeigt.

(2) Nun sei $s_1 > 4/2 + 1$. Dann ist

$$\| Q_0(u,v) \|_{H^{s_1-1,0}} \leq \| (\partial_t u\, \partial_t v) \|_{H^{s_1-1,0}} + \sum_{j=1}^{4} \| (\partial_{x_j} u)(\partial_{x_j} v) \|_{H^{s_1}}$$

$$\leq \| \, \| \partial_t u(t) \|_{H_x^{s_1-1}} \| \partial_t v(t) \|_{H_x^{s_1-1}} \|_{L_t^2} \quad + \text{ same with } \partial_{x_j}$$

$s_1 - 1 > \frac{4}{2}$

$$\leq \| \partial_t u \|_{L_t^4 H_x^{s_1-1}} \| \partial_t v \|_{L_t^4 H^{s_1-1}} + \quad \text{—"—}$$

$$\lesssim \| u \|_{\mathcal{X}^{s_1,\theta}} \| v \|_{\mathcal{X}^{s_1,\theta}}$$

(3) Also haben wir für $s_0 = \frac{4}{2}$, $s_1 = \frac{4}{2} + 1 + \varepsilon$ die Abschätzungen

$$\| Q_0(u,v) \|_{H^{s_0-1,-\theta}} \lesssim \| u \|_{\mathcal{X}^{s_0,\theta}} \| v \|_{\mathcal{X}^{s_0,\theta}}$$

$$\| Q_0(u,v) \|_{H^{s_1-1,0}} \lesssim \| u \|_{\mathcal{X}^{s_1,\theta}} \| v \|_{\mathcal{X}^{s_1,\theta}}$$

wobei $\theta > \frac{1}{2}$ beliebig nahe bei $\frac{1}{2}$ gewählt werden kann.

Ist nun $s \in (s_0, s_1)$ gegeben, so finden wir $\lambda \in (0,1)$, so dass $s = (1-\lambda)s_0 + \lambda s_1$. Dann wählen wir θ so klein, dass $\theta' := -(1-\lambda)\theta > \theta - 1$ und durch Interpolation ist dann:

$$\| Q_0(u,v) \|_{H^{s-1,\theta'}} \lesssim \| u \|_{\mathcal{X}^{s,\theta}} \| v \|_{\mathcal{X}^{s,\theta}}. \qquad \square$$