Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
15.10.2018
Blatt 1

ÜBUNGEN ZU
PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 1 (Gronwallsche Ungleichung, 2 + 4 + 2 + 4 = 12 P.) Es seien $T > 0$, $\varphi, g \in L^1([0,T))$ nichtnegativ mit $\varphi g \in L^1([0,T))$ und $c \geq 0$. Für alle $t \in [0,T)$ gelte

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t g(s)\varphi(s)ds =: \psi(t). \tag{1}$$

(a) Begründen Sie, dass für fast alle $t \in [0,T)$ die Funktion ψ differenzierbar ist und dass $\psi'(t) \leq g(t)\psi(t)$ gilt.

(b) Folgern Sie die Ungleichung

$$\varphi(t) \leq c \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right). \tag{2}$$

(Betrachten Sie zuerst den Fall $c > 0$.)

(c) Diskutieren Sie die folgenden Verallgemeinerungen:

(i) Anstelle einer Konstanten $c \geq 0$ sei $c : [0,T) \to [0,\infty)$ eine stetige und monoton steigende Funktion, so dass (1) mit $c(t)$ statt c gilt.

(ii) Für ein $\delta \in (0,1)$ gelte anstelle von (1)

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t g(s)\varphi(s)^{1-\delta}ds.$$

Hinweis: Die Aussage in (b) wird als Gronwallsche Ungleichung bezeichnet, nach dem schwedischen Ingenieur und Mathematiker Thomas Hakon Grönwall (1877 - 1932). Für $c = 0$ ergibt sich $\varphi = 0$, was in vielen Eindeutigkeitsbeweisen Anwendung findet. Zum Beweis der stetigen Abhängigkeit der Lösung eines AWP von den Daten ist $c = \|u_0 - v_0\| > 0$ sinnvoll.

Bitte wenden!

Für die Hörer der Vorlesung "Harmonische Analysis" vom SoSe 17 dient die folgende Aufgabe lediglich der Wiederholung. Falls nicht der ausdrückliche Wunsch besteht, wird diese nicht besprochen, in der Vorlesung möchte ich allerdings darauf zurückgreifen können.

Problem 1 (Besselfunktionen, keine Abgabe) Für $p \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$f_p(x) := \int_0^\pi \sin^{2p} t e^{-ix\cos t} dt.$$

(a) Begründen Sie, dass f_p beliebig oft ("unter dem Integral") differenzierbar ist. Folgern Sie:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k f_p(x) = (-i)^k \int_0^\pi \cos^k t \sin^{2p} t e^{-ix\cos t} dt.$$

(b) Leiten Sie die Beziehungen $f_p'' = f_{p+1} - f_p$ und $(2p+1)f_p'(x) = -xf_{p+1}(x)$ sowie die Differenzialgleichung $f_p''(x) + \dfrac{2p+1}{x} f_p'(x) + f_p(x) = 0$ $(x \neq 0)$ her.

Die Besselfunktion $J_p : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ der Ordnung $p \geq 0$ wird definiert durch

$$J_p(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(p + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^p f_p(x).$$

(c) Beweisen Sie, dass die Besselsche Differenzialgleichung

$$J_p''(x) + \frac{1}{x} J_p'(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right) J_p(x) = 0$$

erfüllt ist, und leiten Sie

(d) die Rekursionsformeln

$$\frac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) = -x^{-p} J_{p+1}(x) \qquad \text{und} \qquad \frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) = x^p J_{p-1}(x)$$

her.

Abgabe: 22.10.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 26.10.2018