Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
07.01.2019
Blatt 10

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 20 ("Local smoothing" für die Wellengleichung, nach einem "trick" von Tataru, 1996; 2+4+2=8 P.)

Für $n \geq 2$ und $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sei $u(t,x) = \exp(it(-\Delta)^{\frac{1}{2}})u_0(x)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{F}_t u(\tau, x) = c_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\delta(\tau - |\xi|)\widehat{u_0}(\xi)d\xi = c_n \tau^{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau x\xi}\delta(1-|\xi|)\widehat{u_0}(\tau\xi)d\xi.$

(b) Für $\frac{1}{q} = \frac{n-1}{2(n+1)}$ erhält man mit dem Restriktionssatz von Stein und Tomas

$$\|\mathcal{F}_t u(\tau,\cdot)\|_{L^q_x} \lesssim_n \tau^{n-1-\frac{n}{q}} \|\widehat{u_0}(\tau\cdot)\|_{L^2(S^{n-1})}$$

und weiter

$$\|\mathcal{F}_t u(\tau,\cdot)\|^2_{L^q_x} \lesssim_n \tau^{\frac{n-1}{n+1}} \int_{\{\tau=|\xi|\}} |\widehat{u_0}(\xi)|^2 dS_\xi.$$

(c) Für q wie in (b) gilt $\|u\|_{L^q_x(L^2_t)} \lesssim_n \|u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{q}}_x}$.

Problem 7 (3+4+3+3+3+4=20 P.) Das folgende Beispiel zur Nicht-Eindeutigkeit im superkritischen Fall[1] geht zurück auf H. Lindblad (1993): Für $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ sei

$$u(t,x) = \frac{\sqrt{2}}{t}\chi_{(0,\infty)}(t-|x|).$$

Zeigen Sie:

(a) Im distributionellen Sinn ist u eine Lösung der semilinearen Wellengleichung $\square u = u^3$ in *drei* Raumdimensionen. (Beachten Sie $\chi_{(0,\infty)}{}' = \delta$, der Gebrauch der Ketten- und Produktregel kann durch Approximationsargumente gerechtfertigt werden, vgl. ggf. Hörmander, Vol. I, Sec. 6.1.)

Bitte wenden!

[1] vgl. die Diskussion zur Invarianz der semilinearen Wellengleichung unter Skalentransformationen in Kap. 1, p. 14 f..

(b) Die partielle Fouriertransformierte von u bezüglich der Ortsvariablen ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_x u(t,\xi) = \frac{c}{|\xi|^2}\left(\frac{\sin(t|\xi|)}{t|\xi|} - \cos(t|\xi|)\right).$$

(c) Es gilt $|\mathcal{F}_x u(1,\xi)| \lesssim \langle\xi\rangle^{-2}$, und für $-\frac{3}{2} < s < \frac{1}{2}$ ist $\|u(1)\|_{\dot{H}^s} < \infty$.

(d) Für $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$ ist $\|\frac{\partial u}{\partial t}(1)\|_{\dot{H}^{s-1}} < \infty$.

(e) Für $-\frac{3}{2} < s < \frac{1}{2}$ ist $u \in C((0,\infty), \dot{H}^s(\mathbb{R}^3))$ und es gilt $\lim_{t\to 0} \|u(t)\|_{\dot{H}^s} = 0$. (Setzt man also $u(0) = 0$, so ist $u \in C([0,\infty), \dot{H}^s(\mathbb{R}^3))$.)

(f) Berechnen Sie für $-\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2}$ den Grenzwert $\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\|_{\dot{H}^{s-1}}$ sowie $\frac{\partial u}{\partial t}(0)$ in $\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3)$, also den $\dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3) - \lim_{t\to 0} \frac{u(t)-u(0)}{t}$. (Da man ähnlich wie in (e) zeigen kann, dass $\frac{\partial u}{\partial t} \in C((0,\infty), \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3))$ (was hier jedoch nicht verlangt ist), folgt auch $u \in C^1([0,\infty), \dot{H}^{s-1}(\mathbb{R}^3))$.)

Abgabe: 14.01.2019, in der Vorlesung,
Besprechung: 18.01.2019