Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
14.01.2019
Blatt 11

# ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

**Aufgabe 21 (Auswirkung unterschiedlicher Ausbreitungsgeschwindigkeiten in einer Raumdimension, 3+1+1+1=6 P.)**

Es seien $u$ und $v$ Lösungen der Halbwellengleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial v}{\partial x}$$

mit Anfangswerten $u(0) = u_0 \in C_c^1(\mathbb{R})$ und $v(0) = v_0 \in C_c^1(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie unter der Voraussetzung $c \neq 1$, dass

$$\|uv\|_{L^2_{tx}} \lesssim_c \|u_0\|_{L^2_x} \|v_0\|_{L^2_x},$$

und bestimmen Sie die implizite Konstante in Abhängigkeit von der Ausbreitungsgeschwindigkeit $c$. (Ist die Abschätzung scharf?)

(b) Was ergibt sich für $c \to 1$ ? Gilt die Ungleichung $\|u\|_{L^4_{tx}} \lesssim \|u_0\|_{L^2_x}$ ?

(c) Können Sie die Abschätzung in (a) auf $L^p_{tx}$ - Normen mit $p \neq 2$ verallgemeinern?

(d) Erläutern Sie das zugrundeliegende Phänomen anhand einer Skizze.

**Problem 8 (7+1+5+1+1+1=16 P.)** Im folgenden soll die lokale Wohlgestelltheit des Cauchy-Problems $u(0) = u_0 \in \dot{H}^s$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0 \in \dot{H}^{s-1}$ für die semilineare Wellengleichung

$$\Box u = u^k \qquad \text{mit} \qquad k \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad k \geq 2$$

in *einer* Raumdimension unter der Voraussetzung $\frac{1}{2} > s \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{k}$ gezeigt werden. Im einzelnen:

(a) Bestimmen Sie zu $(u_0, u_1) \in \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1}$ ein $R > 0$ und ein $T > 0$, so dass die Abbildung $\Lambda_{(u_0,u_1)}$ aus der zugehörigen Integralgleichung $u = \Lambda_{(u_0,u_1)}(u)$ eine Kontraktion von $B_{R,T} := \{u \in L^\infty_T(\dot{H}^s) : \|u\|_{L^\infty_T(\dot{H}^s)} \leq R\}$ in sich ist.

Bitte wenden!

(b) Welche (untere Schranke für die) Lebensdauer $T = T(u_0, u_1)$ wird durch die einmalige Anwendung des Fixpunktsatzes erreicht?

(c) Zeigen Sie, dass $u \in C([0,T], \dot{H}^s)$ gilt.

(d) Lässt sich so auch $\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0,T], \dot{H}^{s-1})$ einsehen? Oder nur die schwächere Eigenschaft $\frac{\partial u}{\partial t} \in C([0,T], H^{s-1})$ ?

(e) Beweisen Sie Eindeutigkeit der Lösung in $L^\infty_T(\dot{H}^s)$.

(f) Zeigen Sie, dass der Lösungsoperator

$$S_T : \dot{H}^s \times \dot{H}^{s-1} \supset B_{\frac{R}{2}}(0) \to L^\infty_T(\dot{H}^s)$$

(mit $R$ und $T$ wie im Kontraktionsargument) Lipschitz-stetig ist.

**Abgabe:** 21.01.2019, in der Vorlesung,
**Besprechung:** 25.01.2019