Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
21.01.2019
Blatt 12

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 22 (6 P.)

Es seien $E_\sigma := L^\infty_{\Delta T}(H^\sigma(\mathbb{R}^3)) \cap L^{\frac{2}{\sigma}}_{\Delta T}(L_x^{\frac{2}{1-\sigma}}(\mathbb{R}^3))$ mit Norm

$$|||\cdot|||_\sigma := \|\cdot\|_{L^\infty_{\Delta T}(H^\sigma)} + \|\cdot\|_{L^{\frac{2}{\sigma}}_{\Delta T}(L_x^{\frac{2}{1-\sigma}})}.$$

Für $\sigma \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{7})$ sei $w \in E_{\frac{2}{3}} \cap E_\sigma$ und

$$y(t) := J^{-1} \int_0^t \sin\left((t-t')J\right) w^3(t')dt' \qquad (t \in [0, \Delta T]).$$

Zeigen Sie die Abschätzung

$$|||y|||_\sigma \lesssim_\sigma (\Delta T)^{\frac{1}{3}} |||w|||_{\frac{2}{3}} |||w|||_\sigma.$$

Aufgabe 23 (8 P.) Für $s \in \mathbb{R}$ sei

$$\dot{H}^s_{rad} := \{f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^n) : f = f \circ O \quad \text{für alle} \quad O \in SO(n)\},$$

entsprechend $L^p_{rad}(\mathbb{R}^n)$ für $1 \le p \le \infty$. Zeigen Sie die globale Wohlgestelltheit für kleine Daten des Cauchy-Problems

$$u(0) = u_0 \in \dot{H}^1_{rad}(\mathbb{R}^3), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = u_1 \in L^2_{rad}(\mathbb{R}^3)$$

für die semilineare Wellengleichung

$$\Box u = \frac{\partial}{\partial r} u^3$$

in drei Raumdimensionen. (Hierbei ist $\frac{\partial f}{\partial r}(x) = \frac{x}{|x|} \cdot \nabla f(x)$.) Geben Sie den Lösungsraum genau an, und klären Sie insbesondere die Frage, ob die Lösungen der semilinearen Gleichung ebenfalls rotationssymmetrisch sind.

Abgabe: 28.01.2019, in der Vorlesung,
Besprechung: 01.02.2019