Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
22.10.2018
Blatt 2

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 2 (2 + 2 + 2 + 2 = 8 P.) Im folgenden soll anhand eines einfachen Beispiels illustriert werden, dass die in Abschnitt 4.2, Satz 2, hergeleitete untere Schranke für die "blow-up-rate" im Einzelfall durchaus scharf sein kann. Dazu sei $u_0 \in (0, \infty)$.

(a) Lösen Sie für $t \geq 0$ das Anfangswertproblem $u(0) = u_0$ für die gewöhnliche Differenzialgleichung $u' = u^3 - u$ durch Separation.

(b) Bestimmen Sie die Lebensdauer $T^*(u_0)$ der Lösung $u \in C([0, T^*(u_0)), \mathbb{R})$ in Abhängigkeit vom Anfangswert u_0.

(c) Interpretieren Sie das Anfangswertproblem in Teil (a) im Sinn von Abschnitt 4.2 der Vorlesung mit $E = \mathbb{R}$ und $A = -I$: Was ist dann $F(u)$, und welche sind die Lipschitz-Konstanten $L(R)$? Welche untere Schranke für $|u(t)|$ ergibt in dieser Situation der Teil (b) von Satz 2 ?

(d) Zeigen Sie, dass hierdurch im Fall $u_0 > 1$ das Wachstum der Lösung für $t \nearrow T^*(u_0)$ bis auf einen konstanten Faktor korrekt beschrieben wird.

Aufgabe 3 (5 P.) Das nachstehende Beispiel soll zeigen, dass die "Lebensdauer-Funktion" $T^* : E \to (0, \infty]$ im allgemeinen unstetig ist. (In der Vorlesung wurde die Unterhalbstetigkeit von T^* bewiesen.) Dazu seien $E = \mathbb{R}^2$, $A = 0$ und $F(u_1, u_2) = (u_1^2 u_2, -2)$ sowie, für $\varepsilon \geq 0$, $u_{0,\varepsilon} := ((1 + \varepsilon)^{-1}, 2)$. Lösen Sie das Anfangswertproblem $u_\varepsilon(0) = u_{0,\varepsilon}$ für das System

$$\frac{du}{dt}(t) = F(u(t))$$

zweier gewöhnlicher Differenzialgleichungen und bestimmen Sie $T^*(u_{0,\varepsilon})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Lorentz-Transformationen, 4+4+2=10 P.) Es sei $G = (g_{ij})_{0\le i,j\le n}$ die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $g_{00} = 1$ und $g_{jj} = -1$ für $1 \le j \le n$. Eine Matrix $\Lambda = (\lambda_{ij})_{0\le i,j\le n}$ heißt eine Lorentz-Transformation, wenn gilt $\Lambda G \Lambda^\top = G$, d. h.:

$$\sum_{j,l=0}^{n} \lambda_{ij} g_{jl} \lambda_{kl} \left(= \sum_{j=0}^{n} \lambda_{ij} g_{jj} \lambda_{kj} \right) = g_{ik}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Lorentz-Transformationen bilden eine Gruppe, die unter Transposition abgeschlossen ist.

(b) Die Niveauflächen

$$N_c := \{\overline{x} := (t,x)^\top \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle \overline{x}, G\overline{x} \rangle = c\}$$

werden von jeder Lorentz-Transformation bijektiv auf sich abgebildet. (Hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$.) Interpretieren Sie die N_c geometrisch für $c = 0$, $c > 0$ und $c < 0$.

Geben Sie Beispiele für Lorentz-Transformationen an, die die Zeit- und Ortsvariablen *nicht* miteinander verknüpfen.

Abgabe: 29.10.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 02.11.2018