Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
29.10.2018
Blatt 3

ÜBUNGEN ZU
PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 5 (Lorentz-boost, 5 + 2 = 7 P.) Es seien $v = (v_1, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < |v| < 1$, $\gamma(v) := \frac{1}{\sqrt{1-|v|^2}}$ sowie $\Lambda_v = (\lambda_{ij})_{0 \le i,j \le n}$ eine symmetrische Matrix mit $\lambda_{00} = \gamma(v)$, $\lambda_{0j} = \gamma(v) v_j$ für $1 \le j \le n$ und $\lambda_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\gamma(v)-1}{|v|^2} v_i v_j$ für $1 \le i,j \le n$.

(a) Skizzieren Sie die Matrix Λ_v, und zeigen Sie, dass es sich hierbei um eine Lorentz-Transformation handelt.

(b) Zur Erklärung der Bezeichnung "boost" dient die folgende Überlegung: Ein ruhendes Teilchen habe zu zwei aufeinanderfolgenden Zeiten $t_1 < t_2$ die Koordinaten $(t_1, x)^\top$ bzw. $(t_2, x)^\top$ mit einem festen $x \in \mathbb{R}^n$. Welche (konstante) Geschwindigkeit hat das Teilchen nach Anwendung von Λ_v ?

Aufgabe 6 (Lorentz-Invarianz der Klein-Gordon-Gleichung, 4 P.) Es sei $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$ eine zweimal stetig differenzierbare Lösung der homogenen linearen Klein-Gordon-Gleichung $\Box u + m^2 u = 0$ und $v(t,x) = u(\Lambda(t,x))$ mit einer Lorentz-Transformation Λ. Zeigen Sie, dass v ebenfalls diese Gleichung löst.

Aufgabe 7 (Lorentz-Invarianz der Dirac-Gleichung, 5 P.) Um zu erklären, in welchem Sinn die homogene lineare Dirac-Gleichung

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \psi = m \beta \psi$$

ebenfalls Lorentz-invariant ist, multipliziert man die Gleichung mit $\gamma_0 := \beta$, so dass man sie mit $x_0 := t$ und $\gamma_k := \beta \alpha_k$ (für $1 \le k \le n$) etwas kompakter schreiben kann als

Bitte wenden!

$$i \sum_{k=0}^{n} \gamma_k \frac{\partial}{\partial x_k} \psi = m\psi. \tag{1}$$

Nun sei $\Lambda = (\lambda_{jk})_{0 \le j,k \le n}$ eine Lorentz-Transformation und $S = S(\Lambda)$ eine invertierbare Matrix (desselben Formats wie die Dirac-Matrizen) derart, dass für alle $j \in \{0, \ldots, n\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_{jk} \gamma_k = S^{-1} \gamma_j S.$$

Desweiteren sei ψ eine stetig differenzierbare Lösung von (1) und φ definiert durch $\varphi(t, x) := S\psi(\Lambda^{-1}(t, x))$. Zeigen Sie, dass φ ebenfalls die Dirac-Gleichung (1) löst.

Anmerkungen: (i) Die Lösung der Aufgabe ist nur wenig länger als die Aufgabenstellung. - (ii) Die Eigenschaft "Lorentz" wird zur Lösung der Aufgabe nicht gebraucht, auf Ihr beruht die Existenz der Matrizen S, deren Berechnung zu gegebenem Λ durchaus etwas kompliziert sein kann. Für den physikalisch relevantesten Fall $n = 3$ siehe: Thaller, Bernd: The Dirac equation, Appendix 2 D.

Abgabe: 05.11.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 09.11.2018