Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
05.11.2018
Blatt 4

ÜBUNGEN ZU
PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 8 (Energieerhaltung, 4 P.) Zeigen Sie für hinreichend glatte und schnell fallende Lösungen ψ der semilinearen Dirac-Gleichung

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\cdot\nabla\psi\right) - m\beta\psi + f((\psi,\beta\psi))\beta\psi = 0,$$

dass die Energie $E(\psi(t))$, definiert durch

$$E(\psi) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}(\psi,(\alpha\cdot(-i\nabla)+m\beta)\psi) - F((\psi,\beta\psi))dx,$$

zeitlich konstant ist. Hierbei sind $(\cdot,\cdot)$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^N$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetig mit $f(0)=0$ und $F(t)=\displaystyle\int_0^t f(s)ds$.

Aufgabe 9 (Scaling, 5+3=8 P.)

(a) Zeigen Sie: Gilt für alle Lösungen

$$u(t) = \cos(t(-\Delta)^{\frac{1}{2}})u_0 + (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\sin(t(-\Delta)^{\frac{1}{2}})u_1$$

der homogenen linearen Wellengleichung in n Raumdimensionen eine Raum-Zeit-Abschätzung der Form

$$\|u\|_{L^p_t(L^q_x)} \leq c\big(\|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|u_1\|_{\dot{H}^{s-1}}\big)$$

mit einer von (u_0,u_1) unabhängigen Konstante c, so ist $s=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{p}-\dfrac{n}{q}$.

(b) Bestimmen Sie die kritische Sobolevregularität s_c für die *masselose* semilineare Dirac-Gleichung

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + \alpha\cdot\nabla\psi\right) + f((\psi,\beta\psi))\beta\psi = 0$$

mit $f(t)=|t|^{\frac{p-1}{2}}$ und $p>1$.

Bitte wenden!

Problem 2 (Lorentz-Boosts als unitäre Gruppe, 2+1+5+3+3=14 P.)
Es seien $v_0 = (v_1, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor der Länge $|v_0| = 1$ und, für $r \in \mathbb{R}$, $v(r) := \tanh(r)v_0$, so dass $|v(r)| < 1$. Der durch $v(r)$ festgelegte Lorentz-Boost $\Lambda_{v(r)}$ (vgl. Aufgabe 5) sei mit $\Lambda(r) = (\lambda_{jk}(r))_{0\leq j,k\leq n}$ bezeichnet, für $r = 0$ setzt man $\Lambda(0) = E_{n+1}$. Nun sei

$$U(r) : L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x) \to L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$$

definiert durch $U(r)f(\overline{x}) := f(\Lambda(r)\overline{x})$, wobei (wie in Aufgabe 4) $\overline{x} = (t, x)$. Zeigen Sie, dass $(U(r))_{r\in\mathbb{R}}$ eine (stark stetige) unitäre Gruppe ist, und bestimmen Sie durch formale Rechnung deren infinitesimalen Generator.

Abgabe: 12.11.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 16.11.2018