Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
12.11.2018
Blatt 5

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Problem 3 (Sphärische Mittelwerte und Helmholtz'sche Schwingungsgleichung, 4 + 2 + 2 + 1 + 3 + 1 = 13 P.) Es seien $n \geq 2$ die Raumdimension, $k \in \mathbb{R}$ und $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der Helmholtz'schen Schwingungsgleichung

$$(\Delta + k^2)w = 0.$$

(Auf diese Gleichung stößt man z.B. bei dem Versuch, die Wellengleichung durch einen Produktansatz $u(t,x) = v(t)w(x)$ zu lösen.) Nun sei $x \in \mathbb{R}^n$ fixiert und, für $R \in \mathbb{R}$,

$$F(R) := \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} w(x + R\xi) dS_\xi,$$

was für $R > 0$ mit

$$F(R) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|\eta|=R} w(x + \eta) dS_\eta$$

übereinstimmt. Zeigen Sie für $R > 0$

(a) $F'(R) = -\dfrac{k^2}{\omega_n R^{n-1}} \displaystyle\int_{|\eta|<R} w(x+\eta) d\eta,$

(b) $F''(R) + \dfrac{n-1}{R} F'(R) + k^2 F(R) = 0,$

und bestimmen Sie die Anfangswerte $F(0)$ und $F'(0)$. Lösen Sie das sich hieraus ergebende Anfangswertproblem für die Differenzialgleichung in (b) mit dem Ansatz $f(R) = F(\frac{R}{k})$ und den Ergebnissen aus Problem 1. Drücken Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe von Besselfunktionen und, im Fall $n = 3$, elementarer Funktionen aus.

Hinweise: (a) Gauss; (b) Co-Area-Formel bzw. Polarkoordinaten; für die Normierung im letzten Teil ist die Identität

$$\int_0^\pi \sin^{n-2}(t) dt = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

nützlich. Die Frage, ob die gesuchte Lösung von Differenzialgleichung und Anfangswertproblem eindeutig bestimmt ist, können wir in der Übung diskutieren. Und schließlich: Was gilt im Fall $k = 0$?

Bitte wenden!

Aufgabe 10 (6 P.) Es sei $f \in C([0,\infty))$. Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = r > 0$ gilt

$$\int_{|\xi|=1} f(|x+t\xi|)dS_\xi = \frac{2\omega_{n-1}}{(2rt)^{n-2}} \int\limits_{|r-t|}^{r+t} \lambda[(\lambda^2-(r-t)^2)((r+t)^2-\lambda^2)]^{\frac{n-3}{2}} f(\lambda)d\lambda.$$

(Hierbei ist $n \geq 2$ die Raumdimension, $\int\limits_{|\xi|=1} \cdots dS_\xi$ bezeichnet das Integral über die Sphäre $S^{n-1} := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| = 1\}$ und $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ deren Flächenmaß.)

Aufgabe 11 (Besselfunktionen der Ordnung $p = n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$, 2+4+2 = 8 P.) Die Besselfunktionen seien definiert wie in Problem 1. Zeigen Sie:

(a) $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}\big(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\big)^n\big(\frac{\sin x}{x}\big)$,

(b) $J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\big(P_n\big(\frac{1}{x}\big)\sin x - Q_{n-1}\big(\frac{1}{x}\big)\cos x\big)$ mit Polynomen P_n vom Grad n bzw. Q_{n-1} vom Grad $n-1$, die ungleiche Parität haben,

(c) $|J_{n+\frac{1}{2}}(x)| \leq c_n \frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

Abgabe: 19.11.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 23.11.2018