Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
19.11.2018
Blatt 6

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 12 (5 P.) Zeigen Sie (durch direkte Rechnung) die Übereinstimmung der Darstellungsformel aus Satz 3 für $m = 0$ mit der d'Alembert'schen Formel (im Fall $n = 1$) und, für ungerades $n \geq 3$, mit derjenigen aus Satz 1. (Beide Sätze in Abschnitt 2.1 der Vorlesung.)

Aufgabe 13 (Rammaha, 1987; 9 P.) Es sei $n \geq 3$ ungerade und

$$u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}, \qquad (t, x) \longmapsto u(t, x)$$

eine klassische Lösung der homogenen linearen Wellengleichung $\Box u = 0$ mit Daten $u(0, x) = 0$ und $u_t(0, x) = u_1(x) = g(|x|)$. Zeigen Sie, daß für $t > 0$ und $r := |x| > 0$ gilt

$$u(x,t) = \frac{1}{2} r^{\frac{1-n}{2}} \int\limits_{|r-t|}^{r+t} \lambda^{\frac{n-1}{2}} P_{\frac{n-3}{2}} \left(\frac{\lambda^2 + r^2 - t^2}{2r\lambda} \right) g(\lambda) d\lambda.$$

Hierbei bezeichnet $P_\ell(s) := \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{ds^\ell} \left((s^2 - 1)^\ell \right)$ das ℓ-te Legendre Polynom.

Bem.: Rammaha gibt auch eine Integraldarstellung der Lösungen der Wellengleichung im Spezialfall radialer Symmetrie für *gerade* Raumdimensionen an, bei der die Tschebychev'schen Polynome

$$T_\ell(s) := \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \quad \sqrt{1 - s^2} \frac{d^\ell}{ds^\ell} (1 - s^2)^{n - \frac{1}{2}}$$

anstelle der Legendre-Polynome auftreten. Beide werden verwendet, um den "Blow-up in finite time" der Größe $F(t) = \int v(x,t)dx$ für radialsymmetrische Lösungen $v : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der semilinearen Wellengleichung $\Box v = |\nabla v|^p$ für Exponenten $p \in \left(1, \frac{n+1}{n-1}\right)$ $\quad$ $\left(p \in \left(1, \frac{n+1}{n-1}\right]\right.$, falls n ungerade ist) zu beweisen.

In 2008 greifen Hidano und Kurokawa erneut auf diese Darstellungen zurück, um Strichartz-Abschätzungen für radial-symmetrische Lösungen der linearen Wellengleichung mit einem größeren Geltungsbereich für die Hölder-Exponenten p und q als im allgemeinen Fall zu zeigen. Für die Raumdimension $n = 3$ wurde diese Möglichkeit bereits 1993 von Klainerman und Machedon beobachtet, was in der nächsten Aufgabe diskutiert werden soll.

Bitte wenden!

Aufgabe 14 (Klainerman & Machedon, 1993; 4+3+3 = 10 P.) Es sei $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ eine Lösung der homogenen linearen Wellengleichung in drei Raumdimensionen mit Anfangswerten $u(0,x) = u_0(x) = f(|x|)$ und $u_t(0,x) = u_1(x) = g(|x|)$. Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seien o.E. als gerade angenommen und es gelte $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ sowie $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Zeigen Sie:

(a) mit Hilfe von Aufgabe 13 und der $L^2 \to L^2$-Abschätzung für die Hardy-Littlewood-Maximal-Funktion, dass im Fall $f = 0$ gilt

$$\|u\|_{L^2_t(L^\infty_x)} \lesssim \|u_1\|_{L^2_x},$$

(b) dass im Fall $g = 0$ mit $r = |x| > 0$ gilt

$$u(t,x) = \frac{1}{2r}\left((r+t)f(r+t)) + (r-t)f(r-t\right) = \frac{1}{2r}\int\limits_{t-r}^{t+r} \frac{d}{d\lambda}(\lambda f(\lambda))d\lambda$$

(c) für u wie in (b) mit Hilfe der Hardy'schen Ungleichung, dass

$$\|u\|_{L^2_t(L^\infty_x)} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^1_x}.$$

Hinweis: Die genannten Ungleichungen finden Sie z. B. im ersten Band von Grafakos' "Fourier Analysis", Theorem 2.1.6 und Exercise 1.2.8.

Abgabe: 26.11.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 30.11.2018