Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
26.11.2018
Blatt 7

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Problem 4 (Klainermann & Machedon, 1993) 4+4+3+2 = 13 P.) Im folgenden soll gezeigt werden, dass die Endpunkt-Strichartz-Abschätzung

$$\|u\|_{L^2_t(L^\infty_x(\mathbb{R}^3))} \lesssim \|u_1\|_{L^2_x(\mathbb{R}^3)}$$

für Lösungen u der homogenen linearen Wellengleichung $\Box u = 0$ in *drei* Raumdimensionen mit Anfangswerten $u(0) = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t} = u_1$ im allgemeinen falsch ist. Dazu sei $u_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ und u die zugehörige Lösung (mit Daten wie oben).

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen und der Co-Area-Formel: Ist $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $J(u_1, \varphi) = \int\limits_0^\infty u(t, 0, 0, t)\varphi(t)dt$, so gilt

$$J(u_1, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|y|} u_1(y_1 + |y|, y_2, y_3)\varphi(|y|)dy.$$

(b) Finden Sie eine geeignete Koordinatentransformnation, so dass Sie $J(u_1, \varphi)$ darstellen können als

$$J(u_1, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3_+} \frac{1}{z_1} u_1(z)\varphi\left(\frac{|z|^2}{2z_1}\right) dz.$$

(Hierbei ist $\mathbb{R}^3_+ = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 : z_1 > 0\}$.)

(c) Verwenden Sie Polarkoordinaten zum Beweis, dass für $\varphi \neq 0$ die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{C}, z \mapsto \psi(z) := \frac{1}{z_1}\varphi\left(\frac{|z|^2}{2z_1}\right)$$

nicht in $L^2(\mathbb{R}^3_+)$ liegt.

(d) Folgern Sie aus (a) bis (c), dass die eingangs genannte Abschätzung nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen an u_1 gilt.

Bitte wenden!

Problem 5 (Van der Corput, 1921; 4 + 5 + 3 = 12 P.) Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\varphi \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $|\varphi'(\xi)| \geq 1$ für alle $\xi \in [a, b]$ und ist φ' monoton, so gilt für alle $\lambda \geq 1$

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(\xi)} d\xi \right| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

(b) Gilt für ein $k \geq 2$, dass $|\varphi^{(k)}(\xi)| \geq 1$ für alle $\xi \in [a, b]$, so existiert eine Konstante c_k derart, dass für alle $\lambda \geq 1$

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(\xi)} d\xi \right| \leq c_k \lambda^{-\frac{1}{k}}.$$

(c) Sind die Voraussetzungen aus (a) oder (b) für ein $k \in \mathbb{N}$ erfüllt und ist $\psi \in C^1([a, b])$, so gilt

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(\xi)} \psi(\xi) d\xi \right| \leq c_k \lambda^{-\frac{1}{k}} \big(|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(\xi)| d\xi \big).$$

Wie lässt sich die letzte Ungleichung vereinfachen, wenn ψ reell ist und sein Monotonieverhalten auf $[a, b]$ nicht bzw. nur endlich oft ändert?

Hinweise: (a) Verwenden Sie den Operator $L := \frac{1}{i\lambda\varphi'} \frac{d}{d\xi}$ und integrieren Sie partiell. (b) Für einen Induktionsbeweis liefert Teil (a) den Anfang. Was wissen Sie über die Anzahl der Nullstellen von $\varphi^{(k)}$, wenn $\varphi^{(k+1)} \geq 1$ ist? (c) Schreiben Sie den Exponentialfaktor mit dem Hauptsatz als Ableitung eines Integrals, und integrieren Sie erneut partiell.

Abgabe: 03.12.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 07.12.2018