Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
03.12.2018
Blatt 8

ÜBUNGEN ZU
PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 15 (6 P.) Es seien $\widehat{\phi}$ und, für $k \geq 1$, $\widehat{\psi}_k$ die Funktionen aus der Littlewood-Paley-Zerlegung in einer Raumdimension. Zeigen Sie mit Hilfe des Van-der-Corput-Lemmas (Problem 5), dass

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + it\sqrt{1+\xi^2}} \widehat{\phi}(\xi) d\xi \right| \lesssim t^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + it\sqrt{1+\xi^2}} \widehat{\psi}_k(\xi) d\xi \right| \lesssim 2^{\frac{3k}{2}} t^{-\frac{1}{2}},$$

wobei die impliziten Konstanten *nicht* von x, t und k abhängen. Kann es einen derartigen "time-decay" auch für Integrale der Form

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi + it|\xi|} \widehat{\chi}(\xi) d\xi$$

mit beliebigem $\widehat{\chi} \in C_c^\infty$ geben?

Aufgabe 16 (6 P.) Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^{1+3})$ die Lösung der Wellengleichung $\Box u = 0$ in drei Raumdimensionen mit $u(0) = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = \psi_k$ mit einer der Abschneidefunktionen ψ_k aus der Littlewood-Paley-Zerlegung. Zeigen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Formel und des Gauss'schen Integralsatzes (wie in Abschnitt 2.1 der Vorlesung), dass

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_x^\infty} \leq C(\psi_0) \frac{2^k}{t}. \tag{1}$$

Erhält man dies auch aus der Folgerung zu Lemma 5 in Abschnitt 2.2 der Vorlesung? Kann man umgekehrt den Fall $n = 3$ dieser Folgerung mit einem einfachen Argument, also ohne weitere Rechnung, aus (1) erschließen?

Bitte wenden!

Aufgabe 17 (6+2+1=9 P.) Für $k \in \mathbb{Z}$ seien ψ_k wie in Aufgabe 16 und, für $\alpha > 1$ sowie $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\phi_\alpha(\xi) = \dfrac{1}{\alpha}|\xi|^\alpha$. Zeigen Sie mit der "stationary phase method", dass

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi \pm it\phi_\alpha(\xi)} \widehat{\psi}_0(\xi) d\xi \right| \leq c_n \min\left(\|\widehat{\psi}_0\|_1, t^{-\frac{n}{2}}\right).$$

(Für die Berechnung der Determinante der Hesse-Matrix vgl. pp. 76 a,b des Manuskripts.) Welche Abschätzung ergibt sich durch Reskalierung hieraus für

$$I_k^\pm(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi \pm it\phi_\alpha(\xi)} \widehat{\psi}_k(\xi) d\xi \qquad ?$$

Welche Gleichung liegt im Fall $\alpha = 2$ vor, und wodurch ist dieser ausgezeichnet?

Abgabe: 10.12.2018, in der Vorlesung,
Besprechung: 14.12.2018