Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WiSe 2018/19
10.12.2018
Blatt 9

ÜBUNGEN ZU PARTIELLE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN II

Aufgabe 18 (2+1+3+2=8 P.) Für $n \geq 2$ sei σ_C das Flächenmaß des (oberen Halb-) Kegels

$$C := \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \tau = |\xi|\}$$

und $\widehat{\psi_k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \xi \mapsto \widehat{\psi_k}(\xi)$ eine der Abschneidefunktionen aus der Littlewood-Paley-Zerlegung. Für die inverse Fouriertransformierte $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\psi_k}\sigma_C)$ (in allen $n+1$ Variablen) von $\widehat{\psi_k}\sigma_C$ zeige man

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\mathcal{F}^{-1}(\widehat{\psi_k}\sigma_C)(t,x)| \lesssim_n 2^{k\frac{n+1}{2}} t^{-\frac{n-1}{2}} \tag{1}$$

Welche Größenordnung hat das Flächenmaß des Trägers $\operatorname{supp}(\widehat{\psi_k}\sigma_C)$? (Sie können anschaulich argumentieren.)

Formulieren und begründen Sie eine (1) entsprechende Abschätzung für die obere Schale

$$H^+ := \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \tau = \sqrt{1 + |\xi|^2}\}$$

eines Rotationshyperboloiden.

Welche geometrischen Eigenschaften eines Graphen G_φ werden durch die Determinante bzw. die Eigenwerte der Hesse-Matrix von φ bestimmt, und wie wirken sich diese in den obigen Beispielen auf den time-decay der (inversen) Fouriertransformierten des zugehörigen Flächenmaßes aus?

Aufgabe 19 (2+5+1=8 P.) Es sei μ ein endliches Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ und $S := \operatorname{supp}(\mu)$. Die Einschränkungen $f|_S$ aller Schwartzfunktionen $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ seien dicht in L^2_μ. Zeigen Sie:

(a) Für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_S \widehat{g}(\xi) f(\xi) d\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \widehat{f\mu}(x) dx = c_n \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \widehat{f} * \widehat{\mu}(x) dx$$

mit einer dimensionsabhängigen Konstante c_n, die durch die Normierung der Fouriertransformation bestimmt wird. (Fassen Sie $f\mu$ als temperierte Distribution auf und verwenden Sie den Faltungssatz.)

Bitte wenden!

(b) Für Hölderexponenten $q \in (1, \infty]$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\|\widehat{f\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le c\|f\|_{L^2_\mu}$ für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
(ii) $\|\widehat{g}\|_{L^2_\mu} \le c\|g\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$ für alle $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,
(iii) $c_n\|h * \widehat{\mu}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le c^2\|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$ für alle $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Welche Schwierigkeit besteht bei der Interpretation von (i) und (ii) als Stetigkeitsabschätzung für eine lineare Abbildung, wenn μ ein Flächenmaß ist?

Hinweis: Die benötigten Eigenschaften der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ finden Sie ggf. in: Grafakos, Classical Fourier Analysis, Secs. 2.2 und 2.3.

Problem 6 (2+2+(1+1+7)+2=15 P.) Es sei $n \ge 2$ und σ das Flächenmaß auf $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$. Der Restriktionssatz von Stein und Tomas (P. Tomas, 1975) sagt aus, dass die Abschätzung (ii) aus Aufgabe 19 mit $\mu = \sigma$ für alle $q' \in [1, \frac{2n+2}{n+3}]$ gilt.

(a) Begründen Sie kurz die Gültigkeit für $q' = 1$. Welches (namhafte) Lemma aus der Fourier-Analysis zeigt, dass die Einschränkung $\widehat{g}|_{S^{n-1}}$ der Fouriertransformierten $\widehat{g}$ von $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert ist?

(b) Eine Teilaussage des Satzes kann man mit Hilfe von Aufgabe 19 durch eine einfache Anwendung der Hardy-Littlewood-Sobolev-Ungleichung[1] zeigen. Welches Teilintervall $[1, q^*]$ für q' können Sie auf diese Weise erreichen?

(c) Führen Sie eine Littlewood-Paley-Zerlegung $\widehat{\sigma} = \widehat{\phi}\ \widehat{\sigma} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \widehat{\psi_k}\widehat{\sigma}$ ein und zeigen Sie

(i) $\|h * (\widehat{\phi}\ \widehat{\sigma})\|_q \lesssim \|h\|_{q'}$ gilt für alle $q' \le 2$,
(ii) $\|h * (\widehat{\psi_k}\ \widehat{\sigma})\|_\infty \lesssim 2^{-k\frac{n-1}{2}}\|h\|_1$,
(iii) $\|h * (\widehat{\psi_k}\ \widehat{\sigma})\|_2 \lesssim 2^k\|h\|_2$, dieser Teil erfordert neben dem Satz von Plancherel und dem Faltungssatz eine elementargeometrische Überlegung. Beachten Sie auch $\psi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

(d) Interpolieren Sie nach Riesz-Thorin zwischen (ii) und (iii) aus (c).Für diejenigen q, für die Sie einen Faktor $c_k = 2^{-\varepsilon k}$ mit $\varepsilon > 0$ in der Abschätzung $\|h * (\widehat{\psi_k}\ \widehat{\sigma})\|_q \lesssim c_k\|h\|_{q'}$ erzeugen können, sind die Beiträge der “dyadic pieces” summierbar. Für welche Exponenten q bzw. q' ist damit der Restriktionssatz bewiesen?

Zur vertiefenden Lektüre und ggf. auch Hilfestellung zur Lösung sei auf Chap. 11 des ersten Bandes von Muscalu-Schlag: “Classical and multilinear harmonic analysis“ verwiesen.

Abgabe: 07.01.2019, in der Vorlesung,
Besprechung: 11.01.2019

[1] Das ist $\||\xi|^{-\lambda} * h\|_r \lesssim \|h\|_s$ für $0 < \lambda < n$ und $\frac{1}{r'} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{s'}$.