

ÜBUNGEN ZU BM03  
BLATT 1

Name: ..... Name: .....

MatrNr: ..... MatrNr: .....

**Aufgabe 1 (4 Punkte)** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  reelle Parameter. Untersuchen Sie, wie viele Lösungen  $x \in \mathbb{R}$  die lineare Gleichung  $ax = b$  (in Abhängigkeit von den Parametern  $a$  und  $b$ ) besitzt. In welchem Fall handelt es sich bei der Lösungsmenge um einen Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort!

**Aufgabe 2 (4 Punkte)** Untersuchen Sie, ob es sich bei den nachstehenden Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  um Untervektorräume handelt:

- (a)  $\{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : (x - y + z)^2 = 0\}$ ,
- (b)  $\{(x, y, x - y)^\top \in \mathbb{R}^3 : (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2\}$ ,
- (c)  $\{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ ,
- (d)  $\{(2, 0, 4)^\top + \lambda(1, 0, 2)^\top : \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

Begründen Sie Ihre Antwort. (Hinweis:  $(x, y, z)^\top$  bezeichnet den aus  $x, y$  und  $z$  in der genannten Reihenfolge gebildeten Spaltenvektor.)

**Aufgabe 3 (4 Punkte)** Bestimmen Sie den Kern  $\ker(F)$  und das Bild  $R(F)$  der linearen Abbildung

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ z - x \end{pmatrix}.$$

Ist  $F$  injektiv? Beschreiben Sie  $R(F)$  geometrisch und entscheiden Sie, ob  $F$  surjektiv ist.

**Aufgabe 4 (4 Punkte)** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

- (a) Der Kern einer linearen Abbildung  $F : V \rightarrow W$  ist stets ein Untervektorraum von  $V$ .
- (b) Das Bild einer linearen Abbildung  $F : V \rightarrow W$  ist stets ein Untervektorraum von  $V$ .
- (c) Die Vereinigung zweier Untervektorräume  $U_1, U_2$  eines Vektorraums  $V$  ist ebenfalls ein Untervektorraum von  $V$ .
- (d) Die Verknüpfung  $F \circ G$  zweier linearer Abbildungen  $F$  und  $G$ , definiert durch  $F \circ G(x) = F(G(x))$ , ist wieder eine lineare Abbildung.

**Abgabe:** in den entsprechenden Briefkasten bis Mi., 30.04.2025, 10.25 Uhr. Verwenden Sie das Aufgabenblatt bitte als Deckblatt Ihrer Abgabe.

**Besprechung:** am Mi., 30.04.2025 in der Übung