HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF
PROF. DR. AXEL GRÜNROCK
09.07.2025

43	44	45	46	Σ

ÜBUNGEN ZU BM03
BLATT 12

Name: .... Name: ....

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 43 (4 Punkte) Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty)^3 \to (0,\infty), \quad (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) := x^2y + y^2z + z^2x.$$

Berechnen Sie

(a) den Gradienten $\nabla f(x,y,z)$,
(b) die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x,y,z)$ von f nach $\xi = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$, zunächst in einem beliebigen Punkt (x,y,z) und dann speziell in $(x_0,y_0,z_0) = (1,2,2)$,
(c) den Elastizitätgradienten $\vec{\varepsilon}_f(x,y,z)$ und
(d) die Richtungselastizität $\varepsilon_{f,\eta}(x,y,z)$ bezüglich der Richtung $\eta = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

Aufgabe 44 (4 Punkte) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x,y) = (x+y)^2 + (x-y)^3.$$

(a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f.
(b) Berechnen Sie $\text{Hess} f(x,y)$.
(c) Bestimmen Sie die Determinante von $\text{Hess} f(x,y)$ (Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis!).
(d) Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $\text{Hess} f(x,y)$ positiv definit?

Aufgabe 45 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := |x|^2 e^{-|x|^2}.$$

Untersuchen Sie, ob f *isolierte* Extrema besitzt.

Aufgabe 46 (4 Punkte) Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sei

$$P(x,y) = x^3 - 2xy + y^3.$$

(a) P besitzt zwei kritische Stellen. Bestimmen Sie diese.
(b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $\text{Hess} P(x,y)$ und deren Determinante.
(c) Untersuchen Sie $\text{Hess} P(x,y)$ in den kritischen Stellen von P auf Definitheit. Besitzt P lokale Extrema? Wenn ja, welchen Typs?
(d) Besitzt P ein globales Extremum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Mi., 16.07.2025, 10.25 Uhr. Verwenden Sie das Aufgabenblatt bitte als Deckblatt Ihrer Abgabe. **Die Korrektur erfolgt nur für diejenigen, die die Zulassung mit den ersten 11 Blättern noch nicht erreicht haben.**

Besprechung: am Mi., 16.07.2025 in der Übung