Kap. 2: Differenzialrechnung in mehreren Variablen

2.0 Rekapitulation: Differenzial- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlicher

In diesem Abschnitt stets: Funktionen $f: \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, wobei I ein (möglicherweise unbeschränktes) Intervall ist.

<u>Def.</u>: Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. f heißt differenzierbar in x_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) =: f'(x_0)$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f in x_0.

<u>Bem.</u>: (1) weitere Bez.: $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=x_0}$.

(2) geometrische Interpretation: Tangentensteigung des Graphen G_f in $(x_0, f(x_0))$ als Grenzwert von Sekantensteigungen.

(3) Differenzierbarkeit in x_0 $\Rightarrow$ Stetigkeit in x_0, denn wenn $f'(x_0)$ existiert, ist $|f(x_0+h) - f(x_0)| \le |f'(x_0)||h| \to 0$ $(h \to 0)$, jedenfalls im Grenzwert.

(Die Umkehrung gilt nicht: $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar.)

Def.: $f: I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in I, wenn f in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion

$$f': I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x)$$

die Ableitung von $f: I \to \mathbb{R}$.

Bem.: (1) Ökonomische Terminologie: Marginal- bzw. Grenzfkt.

(2) Zu unterscheiden ist zwischen

$f': I \to \mathbb{R}$, Ableitung von f, eine Funktion $\quad$ und $\quad$ $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, Ableitung von f in $x_0 \in I$, das ist eine Zahl.

(3) Höhere Ableitungen: Ist $f': I \to \mathbb{R}$ auch differenzierbar, können wir die zweite Ableitung $f'' := (f')'$ bilden, allgemeiner die n-te Ableitung $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, sofern all diese Grenzwerte existieren.

Bsp.: (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ fest, affin-lin. Fkt.)

Hierfür ist $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(a(x+h) + b - ax - b)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(ax + ah - ax) = \lim_{h \to 0} a = a.$$

Gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $f''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(a - a) = 0$ folgt.

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((x+h)^2 - x^2) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(2xh + h^2) = 2x$$

und nach Bsp. (1) $f''(x) = 0$.

(3) Allgemeiner: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$

Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} = n x^{n-1} + h \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2}$$

woraus sich für $h \to 0$ ergibt: $f'(x) = n x^{n-1}$.

Weil es im allgemeinen zu umständlich ist, Ableitungen mit Hilfe der Definition auszurechnen, leitet man einige Rechenregeln für Ableitungen her:

1. Linearität: Ist $f(x) = \lambda g(x) + \mu h(x)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und differenzierbaren Funktionen g und h, so gilt

$$f'(x) = \lambda g'(x) + \mu h'(x).$$

Bsp. (3) oben + Linearität

Bsp. (1) Polynome $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow P'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$

(2) Potenzreihen in ihrem Konvergenzbereich:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Longrightarrow \quad P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

(aus (1) durch Grenzübergang; math. nicht trivial!)

Anwendung: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$$

Ähnlich: $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$= \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

2. Produktregel: $f(x)=g(x)h(x)$, g und h differenzierbar ④

$$\Rightarrow f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)\cdot h'(x)$$

3. Quotientenregel: $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$, g und h differenzierbar und $h(x)\neq 0 \ \forall x\in I \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{h(x)^2}(g'(x)h(x)-g(x)h'(x))$

(Nützlich insbesondere für die Ableitung rationaler Fktn.)

4. Kettenregel (für die Verknüpfung zweier Funktionen):

beide diff.bar

$$f(x)=g(h(x)) \Rightarrow f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$$

Bsp.: (i) $f(x)=g(cx)$, $c\in\mathbb{R}$ fest $\Rightarrow f'(x)=c\cdot g'(cx)$, konkret

$f(x)=e^{cx}\Rightarrow f'(x)=c\cdot e^{cx}$ und daher auch

$f(x)=a^x=\exp(x\cdot\ln(a))\Rightarrow f'(x)=\ln(a)\cdot a^x$.

(ii) $f(x)=\exp(\exp(\exp(x)))=f_3\circ f_2\circ f_1(x)$

mit $f_1=f_2=f_3=\exp$. Die Kettenregel ergibt hier

$$f'(x)=f_3'(f_2(f_1(x)))\cdot(f_2\circ f_1)'(x)=f_3'(f_2(f_1(x)))\cdot f_2'(f_1(x))\cdot f_1'(x)$$

$$\underset{\text{hier}}{=}\exp(\exp(\exp(x)))\cdot\exp(\exp(x))\cdot\exp(x).$$

5. Ableitung der Umkehrfunktion: Aus $f\circ f^{-1}(x)=x$ folgt mit der Kettenregel:

$$f'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1})'(x)=1,$$

also $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, sofern $f'(y)\neq 0$ ist $\forall y\in I$.

Anwendung: $f(x)=\exp(x)$, $f^{-1}(x)=\ln(x)$

$$\Rightarrow \ln'(x)=\frac{1}{\exp'(\ln(x))}=\frac{1}{\exp(\ln(x))}=\frac{1}{x}.$$

mit der Kettenregel zusammen für $x^b=\exp(b\cdot\ln(x))$

$\frac{d}{dx}x^b=b\cdot x^{b-1}$

$b\notin\mathbb{N}$!

Anwendungen und Interpretationen:

(1) Monotonie:

<u>Def.</u>: $f: I \to \mathbb{R}$ heißt

(i) monoton steigend, wenn für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) \leq f(y)$;

(ii) streng monoton steigend, wenn für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ gilt, dass $f(x) < f(y)$;

(iii) (streng) monoton fallend, wenn $-f: I \to \mathbb{R}$ (streng) monoton steigend ist.

Für differenzierbare Funktionen gilt das folgende Kriterium:

Monotoniesatz: $f: I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann gelten:

(1) f ist monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in I$;

(2) f " " fallend $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in I$;

(3) $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton steigend;

(4) $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in I \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend.

<u>Bem.</u>: In (3) und (4) gilt kein $\Leftarrow$. Bsp. $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$.

<u>Folgerung</u>: Besitzt eine differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt $x_0 \in I$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Die Nullstellen der Ableitung sind also die Kandidaten für lokale Extrema; daher nennt man sie auch die <u>"kritischen Stellen"</u> von f.

(2) Elastizität:

Nach (1) ist die Ableitung ein Maß für die Steigung einer Funktion, und zwar ein absolutes Maß, d.h. weder bezogen auf die Größe der Funktionswerte, noch auf die der Argumente. In den Wirtschaftswissenschaften benötigt man häufig ein dimensionsloses (= Einheitenloses) Maß für die relative Änderung der Funktionswerte. Relativ sowohl in Bezug auf $x \in I$ als auch in Bezug auf $f(x)$.

Def.: Es sei $I \subset (0,\infty)$ und $f: I \to (0,\infty)$ differenzierbar. Dann heißt

$$\varepsilon_f : I \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \varepsilon_f(x) := \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$$

die Elastizität von f.

Weitere Bezeichnungen in diesem Zusammenhang:

$f: (0,\infty) \supset I \to (0,\infty)$ heißt

(1) unelastisch in $x \in I$ $:\Leftrightarrow |\varepsilon_f(x)| < 1$;

(2) elastisch " $x \in I$ $:\Leftrightarrow |\varepsilon_f(x)| > 1$;

(3) ausgeglichen elastisch in $x \in I$ $:\Leftrightarrow |\varepsilon_f(x)| = 1$;

(4) total unelastisch in $x \in I$ $:\Leftrightarrow \varepsilon_f(x) = 0$;

(Entsprechend für Intervalle!)

(5) isoelastisch, wenn ε_f konstant ist.

Bsp.: $f(x) = x^\lambda \Rightarrow \varepsilon_f(x) = \lambda \;\forall x > 0$

Andere isoelastischen Funktionen gibt's nicht.

(3) Die 2. Ableitung: Konvexität und progressives Wachstum

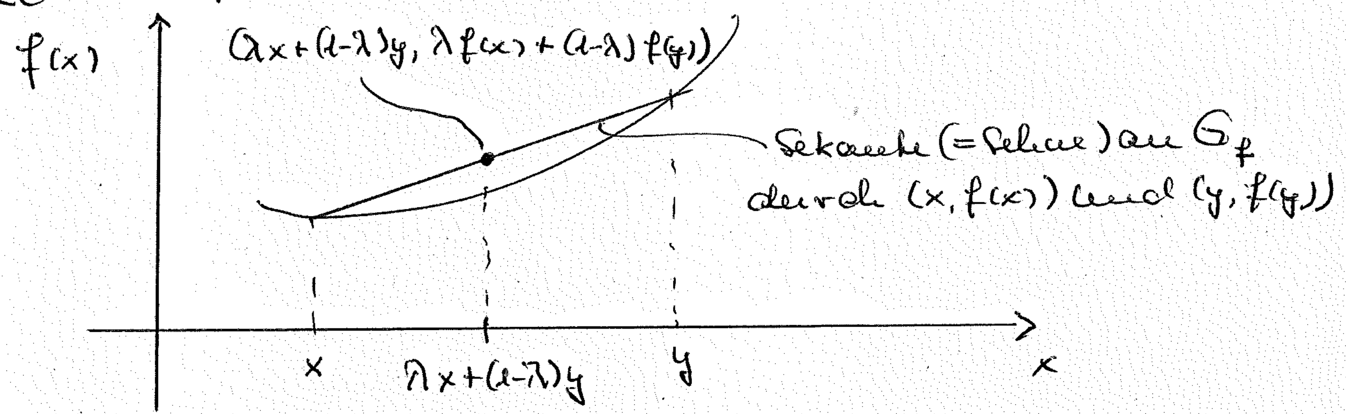
Def.: Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt, dass

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \qquad (K)$$

f heißt streng konvex, wenn in (K) $<$ anstelle von $\le$ gilt.

f heißt (streng) konkav, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Skizze und geometrische Interpretation:



Bei einer konvexen Funktion liegen alle Sekanten des Graphen G_f oberhalb von G_f, bei konkaven Funktionen unterhalb.

Bsp.: (i) streng konvex auf $\mathbb{R}$: $\exp$, $M_{2n}(x) = x^{2n}$

(ii) Affin-lineare Funktionen $x \mapsto ax+b$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ sowohl konvex als auch konkav, beides nicht streng.

(iii) $M_{2n+1}(x) = x^{2n+1}$ sind streng konvex auf $[0,\infty)$ und streng konkav auf $(-\infty, 0]$. Es handelt sich also um lokale und nicht um globale Eigenschaften.

(iv) streng konkav auf $(0,\infty)$: $\ln$, $\sqrt{\ }$

Die Konvexität einer Funktion mit Hilfe der Definition nachzurechnen ist oft umständlich und mühsam. Die Differentialrechnung stellt das folgende, gut handhabbare Kriterium bereit:

Konvexitätssatz: $f: I \to \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar. Dann gelten:

(1) f ist konvex auf I $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$,

(2) f " konkav " $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$.

Bem.: Ist $I \subset \mathbb{R}$ offen und $f: I \to \mathbb{R}$ konvex (oder konkav), so kann man folgern, dass f stetig und einseitig differenzierbar ist. Die konvexe Funktion $f(x) = |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar; aus Konvexität folgt also nicht die Differenzierbarkeit.

Mit Hilfe des Begriffpaares konvex/konkav können wir das Wachstum einer Funktion genauer charakterisieren:

Def.: Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt

(i) progressiv wachsend, wenn f monoton steigend und konvex ist, ($\exp$, $x \mapsto x^2$ auf $[0,\infty)$)

(ii) degressiv wachsend, wenn f monoton steigend und konkav ist, ($\ln$ auf $(0,\infty)$)

(iii) progressiv fallend, wenn f monoton fallend und konkav ist, ($x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ auf $[0,1]$)

(iv) degressiv fallend, wenn f monoton fallend und konvex ist. ($x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $(0,\infty)$)

Kriterium: Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ gelten:

(1) f ist progressiv wachsend $\Leftrightarrow f' \geq 0$ und $f'' \geq 0$;

(2) f ist degressiv wachsend $\Leftrightarrow f' \geq 0$ und $f'' \leq 0$;

(3) f ist progressiv fallend $\Leftrightarrow f' \leq 0$ und $f'' \leq 0$;

(4) f ist degressiv fallend $\Leftrightarrow f' \leq 0$ und $f'' \geq 0$.

Bem.: Dabei bedeutet $f' \geq 0$: $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$. Ebenso für f'' und für $\leq$.

Bezug zu Kostenfunktionen: Eine Kostenfunktion $K: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \mapsto K(x) = K_{fix} + K_{var}(x)$ heißt

- neoklassisch, wenn sie degressiv wachsend ist (was in der Regel damit zusammenfällt, dass die Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ sinkt), und
- ertragsgesetzlich, wenn sie auf $[0, x_0]$ degressiv und auf $[x_0, \infty)$ progressiv steigt.

(4) Die 2. Ableitung: Kriterien für lokale Extrema

Zuerst eine weitere

Notwendige Bedingung: Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit stetiger 2. Ableitung. In einem inneren Punkt x_0 von I besitze f ein lokales Maximum. Dann gelten

$$f'(x_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x_0) \leq 0.$$

Folgerung: Besitzt f in einem solchen x_0 ein Minimum, so gelten $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)\geq 0$.

<u>Hinreichende Bedingung</u>: Es sei $f: I\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit stetiger 2. Ableitung. In $x_0\in I$ gelte

$$f'(x_0)=0 \quad \text{und} \quad f''(x_0)<0.$$

Dann besitzt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum.

<u>Bem.</u>: (1) Ein isoliertes lokales Minimum, wenn $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$.

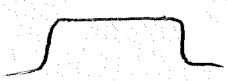
(2) Zwischen notwendiger und hinreichender Bedingung besteht eine Lücke, nämlich wenn $f'(x_0)=f''(x_0)=0$. Hier kann dreierlei passieren

(i) $f(x)=x^4$, $x_0=0$: isoliertes Minimum.

(ii) $f(x)=x^3$, $x_0=0$: kein Extremum ("Sattelpunkt").

(iii) $f(x)=-x^4$, $x_0=0$: isoliertes Maximum.

Insofern sind die Kriterien nicht trennscharf.

(3) Isoliertes  und nicht isoliertes  Maximum. (Mehr Möglichkeiten für nicht isoliert bei Funktionen mehrerer Variablen.)

(4) Keine Aussagen über globale Extrema. Hier führt der Monotoniesatz in einfachen Fällen zum Ziel. Alternativen: Grenzwertbetrachtungen, Taylorapproximationen.

Die Integration fassen wir als Umkehrung der Ableitung auf. Das ist zwar unhistorisch und mathematisch nur unter bestimmten Voraussetzungen korrekt, entspricht aber dem Vorgehen im Schulunterricht und führt am schnellsten zu praktischen Ergebnissen.

Def.: Gegeben sei eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ und eine differenzierbare Funktion $F:[a,b]\to\mathbb{R}$. Dann heißt F eine Stammfunktion von f, wenn $F'(x)=f(x)$ für alle $x\in[a,b]$ gilt.

Bem.: (1) Besitzt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so nennen wir f integrierbar. Jede stetige Funktion ist integrierbar, es gibt allerdings auch nicht integrierbare Funktionen.

(2) Die Stammfunktion F einer integrierbaren Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

(3) Die Gesamtheit aller Stammfunktionen F einer integrierbaren Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ nennen wir das "unbestimmte Integral" von f; Schreibweise

$$\int f(x)\,dx.$$

Bsp.: (1) $f(x)=x^k,\ k\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow \int f(x)\,dx=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ (+C)$.
Gilt auch für $k\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$, sofern nicht über $x_0=0$ hinweg integriert wird, ja sogar für $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

wenn das Integrationsintervall in $(0,\infty)$ enthalten ist.

(2) $[a,b] \subset (0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int f(x)dx = \ln(x)$ $(+C)$

$[a,b] \subset (-\infty, 0)$, $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int f(x)dx = \ln(-x)$,

denn $\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1)$ (Kettenregel).

Wird häufig zusammengefasst zu $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|)$, $(x \neq 0)$.

(3) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ beliebig, $f(x) = e^x \Rightarrow \int f(x)dx = e^x$,

ebenso $\int \sin(x)dx = -\cos(x)$, $\int \cos(x)dx = \sin(x)$.

Für die Anwendung der Integralrechnung ist der folgende Begriff von zentraler Bedeutung:

Def.: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Stammfunktion F.

Dann heißt

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

das bestimmte Integral von f über $[a,b]$.

Bem.: Sind a, b und f gegeben, so ist $\int_a^b f(x)dx$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl. Diese ist unabhängig von der Wahl der Stammfunktion von f.

Konvention: Für $a < b$ erklären wir

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Geometrische Interpretation:

(1) Ist $f: [a,b] \to [0,\infty)$ stetig, so ist

$\int_a^b f(x)dx =$ Flächeninhalt zwischen dem Graphen

$G_f = \{(x,f(x)) : a \leq x \leq b\}$, der x-Achse und den Geraden $\{(a,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$ und $\{(b,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}$.

(2) Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx = \text{Mittelwert von } f \text{ auf } [a,b]$$

Vom technischen Standpunkt aus besteht die Hauptaufgabe der Integralrechnung darin, zu einer gegebenen Funktion f eine Stammfunktion F zu finden. Das gelingt zumeist dadurch, dass man ein gegebenes (unbestimmtes) Integral durch Anwendung einiger weniger Rechenregeln auf die o.g. Grundintegrale zurückführt. Diese Integrationsregeln ergeben sich durch Umkehrung der Ableitungsregeln.

(1) Linearität des Integrals: Für integrierbare Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int \lambda f(x) + \mu g(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx$$

(Gilt ebenso für bestimmte Integrale.)

Anwendung: Integration von Polynomen u. Potenzreihen:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \implies \int p(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

(Für Potenzreihen ist streng genommen eine Konvergenzbetrachtung erforderlich.)

(2) Intervalladditivität: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$,

sofern f auf allen auftretenden Intervallen integrierbar ist. Aufgrund der Konvention $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ist hierbei $c<a$ und $b<c$ möglich.

(3) "$\frac{1}{\alpha}$-Regel" – die einfachste Form der Umkehrung der Kettenregel: Ist $g(x) = f(\alpha x+\beta)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ und $\int f(x)\,dx = F(x)$, so gilt $\int g(x)\,dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x+\beta)$.

Begründung: $\frac{d}{dx}\frac{1}{\alpha}F(\alpha x+\beta) = \frac{1}{\alpha}\cdot F'(\alpha x+\beta)\cdot\frac{d}{dx}(\alpha x+\beta) = f(\alpha x+\beta) = g(x)$

Anwendungen: • $\int \frac{1}{x-7}\,dx = \ln(|x-7|)$ $(\alpha=1,\ \beta=-7)$;

• $\int \sinh(x)\,dx = \int \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,dx \underset{\alpha=\pm1,\ \beta=0}{=} \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = \cosh(x)$;

• $\int e^{\alpha x+\beta}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}$, insbes. $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln(a)}a^x$
$= \exp(x\cdot\ln(a))$, $\alpha = \ln(a)$

(4) Partielle Integration (Umkehrung der Produktregel):

Aus $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ folgt durch Integration

$$f(x)\cdot g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Subtrahiert man den ~~mittleren~~ ~~zweiten~~ letzten Term, erhält man mit

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

die übliche Form. Version für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx,$$ wobei

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Bsp.: (i) $\int \underset{f}{x}\, \underset{g'}{e^x}\, dx = x \cdot e^x - \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{e^x}\, dx = (x-1)\cdot e^x$

$\int \underset{f}{x^2}\, \underset{g'}{e^x}\, dx = x^2 e^x - 2\int x e^x\, dx \underset{\text{s.o.}}{=} (x^2-2x+2)e^x$ usw.

Damit kann man $\int x^n e^x dx$ und allgemeiner $\int P(x) e^x dx$ bestimmen, wenn P ein Polynom ist. Ähnlich gehen

$$\int P(x)\cosh(x)\,dx,\ \int P(x)\sinh(x)\,dx,\ \int P(x)\cos(x)\,dx, \dots$$

(ii) $\int \underset{f'}{x^n} \cdot \underset{g}{\ln(x)}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot \ln(x) - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\cdot \frac{1}{x}\, dx$

$$= \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\cdot \ln(x) - \int x^n dx\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right).$$

Hierbei $n \in \mathbb{N}_0$, insbesondere $\int \ln(x)\,dx = x(\ln(x)-1)$.

(5) Substitutionsregel (= Umkehrung der Kettenregel):

Aus $\quad (F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

erhalten wir (mit $F' = f$) durch Integration

$$\int f(y)\,dy\,\Big|_{\varphi(x)} := F(\varphi(x)) = \int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx$$

Für das bestimmte Integral ergibt sich hieraus

$$\int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy.$$

Um diese Regel erfolgreich anwenden zu können, ist es erforderlich, die Struktur $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ zu erkennen, evtl. sogar herzustellen, was etwas Übung erfordert. Daher einige Beispiele:

(1) $f(y) = \frac{1}{y}$, φ positiv, sog. logarithmisches Integral:

$$\Rightarrow \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{dy}{y}\Big|_{y=\varphi(x)} = \ln(\varphi(x))$$

Anwendungen: $\varphi(x) = 1+x^2 \leadsto \varphi'(x) = 2x$

(i) $$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot \ln(1+x^2) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$$

(ii) Ist $\varphi > 0$ eine differenzierbare Funktion mit der Elastizität $\varepsilon_\varphi(x) = \frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)} = h(x) \leftarrow$ vorgegeben. Damit ist

$$\ln(\varphi(x)) = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \int \frac{h(x)}{x}\,dx \; (+C)$$ und somit

$$\varphi(x) = \exp\left(\int \frac{h(x)}{x}\,dx\right)(\cdot C)$$ Eindeutig bis auf eine multiplikative Konstante.

(2) $f(y) = y^n$, φ beliebig

$$\Rightarrow \int \varphi(x)^n \cdot \varphi'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\,\varphi(x)^{n+1}$$

Anwendung: $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2$ $\quad (n=1,\ \varphi(x) = \ln(x))$

(3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = ?$ Wir versuchen $\varphi(x) = \sqrt{x} \leadsto \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\varphi(x)}$.

Also ist $1 = 2\,\varphi(x)\cdot\varphi'(x)$ und damit

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2\,\varphi(x)\,\varphi'(x)}{1+\underbrace{\sqrt{x}}_{=\varphi(y)}}\,dx = \int \frac{2y}{1+y}\,dy\Big|_{y=\varphi(x)=\sqrt{x}}$$

$$= 2\cdot\int \frac{1+y}{1+y} - \frac{1}{1+y}\,dy\Big|_{y=\sqrt{x}} = 2\left(y - \ln(1+y)\right)\Big|_{y=\sqrt{x}}$$

$$= 2\left(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})\right).$$

(4) Stammfunktion einer logistischen Funktion: $a, b \in \mathbb{R}, c > 0$ (16a)

$$\int \frac{a + be^{cx}}{1+e^{cx}}\, dx = \int a + \frac{(b-a)e^{cx}}{1+e^{cx}}\, dx$$

$$= ax + (b-a) \cdot \int \frac{e^{cx}}{1+e^{cx}}\, dx = ax + \frac{b-a}{c} \cdot \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx$$

für $\varphi(x) = 1 + e^{cx}$, also $\ldots = ax + \frac{b-a}{c} \cdot \ln(1+e^{cx})$.