1.2 Auflösung von Gleichungen

Mathematische Modelle der Finanz- und Wirtschaftswissenschaft stellen das Ergebnis eines ökonomischen Vorgangs oft durch einen "Rechenterm" dar, in den viele diesen Vorgang charakterisierenden Parameter / Variablen eingehen. In der Finanzmathematik (s. Kap. 2) wird z.B. der Endkapitalstand K_t nach Ablauf der Zeitspanne t (Jahre) bei einem Ratensparvorgang mit Zinseszins im einfachsten Fall (Zinsperioden = Ratenperioden, z.B. Monate, Quartale oder Jahre) dargestellt durch $K_t = K_0 \cdot q^n + R \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, und die rechte Seite hängt von den Parametern K_0 (Anfangskapital), R (Ratenhöhe), n (Anzahl der Zins- und Ratenperioden im Zeitraum t) und $q = 1 + \frac{p \cdot t}{100 \cdot n}$ (Aufzinsungsfaktor für eine Ratenperiode zum Zinsfuß $p\%$) ab. Auf das Problem der Auflösung einer solchen **Gleichung** nach einer der darin vorkommenden Variablen stößt man immer dann, wenn ein bestimmtes Ergebnis gewünscht ist und gefragt wird, welchen Wert man für eine bestimmte Variable zu wählen hat, damit dieses Ergebnis auch genau herauskommt. Diese Variable wird dann die **Unbekannte** der Gleichung genannt, und jeden Wert der Unbekannten, für den die Gleichung richtig ist, nennt man eine **Lösung** der Gleichung. Von den anderen in der Gleichung auftauchenden Variablen hängt die Gleichung und ihre Lösung(en) natürlich auch ab, aber für diese Variablen kennt man entweder aus dem ökonomischen Kontext die Zahlenwerte oder man stellt sich bei der Behandlung der Gleichung auf den Standpunkt, dass diese Werte als bekannt anzusehen sind; diese anderen Variablen werden **Parameter** in der Gleichung genannt.

Fragt man z.B. danach, wie obiger Ratensparvorgang verzinst sein muss, um ein bestimmtes Endkapital zu produzieren, so ist q die Unbekannte in der Rentengleichung und K_t, K_0, R, n sind Parameter. In einer parameterabhängigen Situation hat man gewissermaßen nicht nur eine Gleichung, sondern eine ganze Schar von Gleichungen – für jede mögliche Wahl der Parameterwerte eine. Dann hängt auch die Lösung von den jeweiligen Parameterwerten ab, kann also nicht als Zahlenwert angegeben werden, sondern allenfalls mit einer Lösungsformel, einem "Rechenterm", der die Werte der Lösung(en) in Abhängigkeit von den jeweiligen Parameterwerten angibt. Unter der expliziten **Auflösung der Gleichung** nach der Unbekannten versteht man die Angabe eines solchen Rechenterms, der die Lösungen der Gleichung parametrisiert. Allerdings ist das schon bei relativ einfachen Gleichungen, wie z.B. bei der Rentengleichung oben mit der Unbekannten q, nicht möglich. Man kann dann allenfalls für konkrete Parameterwerte durch geeignete mathematische Verfahren die Lösung(en) näherungsweise berechnen.

Es gibt auch ökonomische Situationen, in denen man mehrere Variablen als gleichberechtigte Unbekannte betrachten möchte, ohne eine von ihnen als (beliebiger Werte fähige) Unbekannte auszuzeichen und die andern als (auf feste Werte fixierte) Parameter anzusehen. Wenn man dann nur eine Gleichung hat, welche die Unbekannten verbindet, so wird diese im Allgemeinen eine ganze Schar von Lösungen haben: Man kann z.B. alle Unbekannten außer einer auf beliebige Werte festsetzen und dann mit der Gleichung dazu einen Wert der letzten Unbekannten so bestimmen, dass die Gleichung erfüllt ist. Eine Situation, bei der man aufgrund ökonomischer Überlegungen genau eine Lösung erwartet (etwa genau eine optimale Wahl der Variablen), kann von einer solchen Gleichung für mehrere Unbekannte also nicht mathematisch modelliert werden; vielmehr braucht man weitere Gleichungen (ökonomische Gesetze), welche die Unbekannten in Beziehung setzen und so die Vielfalt der Lösungen reduzieren. Bei einer sinnvollen Problemstellung ist dabei (von Ausnahmen abgesehen) *die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten.* Hat man weniger Gleichungen als Unbekannte, so gibt es im allgemeinen "zu viele" Lösungen, nämlich ganze Lösungsscharen, hat man aber mehr Gleichungen als Unbekannte, so gibt es im Allgemeinen "zu wenige" Lösungen, nämlich gar keine.

In diesem Abschnitt betrachten wir aber nur *eine* Gleichung für *eine* Unbekannte, die wir, wie in der Mathematik allgemein üblich, oft mit "x" bezeichnen und die Werte in Bereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ annehmen kann oder auch in einer vorgegebenen Teilmenge $G \subset \mathbb{R}$, der *Grundmenge* für die Gleichung. Für ökonomische Variablen sind z.B. oft nur positive Werte sinnvoll, und wenn x eine solche Variable ist, so wird man die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen als Grundmenge wählen. Eine Gleichung für die Unbekannte x hat nun die allgemeine Form

$$T(x) = 0 \qquad \text{oder} \qquad T_{\text{links}}(x) = T_{\text{rechts}}(x) \qquad\qquad (x \in G),$$

wobei $T_{\text{links}}(x)$ und $T_{\text{rechts}}(x)$ reellwertige "Rechenterme" sind, genannt die **linke Seite** bzw. **rechte Seite** der Gleichung. Die kürzere erste Form $T(x) = 0$ lässt sich immer herstellen, indem man den Term $T(x)$ als Differenz $T_{\text{links}}(x) - T_{\text{rechts}}(x)$ definiert; doch taucht bei vielen Gleichungen die Unbekannte zunächst auf beiden Seiten auf, daher ist die zweite Form vielleicht vorzuziehen. In den Termen können dabei neben der Unbekannten x auch noch die Parameter $a, b, c, \ldots$ der Gleichung vorkommen; das kann man durch die genauere Schreibweise $T(x; a, b, c, \ldots)$ ausdrücken, wenn es erforderlich ist. Andererseits braucht die Variable x in den Termen überhaupt nicht aufzutreten, auch wenn die Notation Abhängigkeit von x suggeriert, sondern es kann sich auch um sog. *Konstanten* handeln, d.h. relle Zahlen oder Ausdrücke, die nur von den Parameterwerten abhängen, nicht vom Wert der Unbekannten x. (Das ist sinnvoll; denn man kann ja eine Konstante c immer auch als Term $c - x + x$ schreiben, in dem x formal vorkommt.)

Lösungen der Gleichung sind diejenigen reellen Zahlen (in der Grundmenge), die bei Einsetzen für die Unbekannte x auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung dieselbe reelle Zahl ergeben, für die also die Gleichung tatsächlich "gilt". Dazu gehört auch die Bedingung, dass sich diese Werte in die Terme überhaupt einsetzen lassen, also zum Definitionsbereich der Terme auf beiden Seiten gehören. Nicht einsetzen kann man z.B. Werte von x, für die ein in den Termen vorkommender Nenner Null wird; denn durch Null darf man ja nicht dividieren. Nicht einsetzen kann man weiter Werte von x, die einen vorkommenden Radikanden, also einen Ausdruck, aus dem die Quadratwurzel zu ziehen ist, negativ machen; denn Quadratwurzeln haben nur nichtnegative Zahlen. Nicht einsetzen kann man schließlich Werte von x, die einen Ausdruck nichtpositiv machen, der zu logarithmieren ist; denn nur positive Zahlen haben Logarithmen. Das sind die wichtigsten Restriktionen für das Einsetzen von Werten der Variablen in Rechenterme.

Die Gesamtheit aller Lösungen heißt die **Lösungsmenge der Gleichung**. Wenn eine Grundmenge spezifiziert ist, so gehören zur Lösungsmenge nur die Lösungen, die auch in der Grundmenge liegen; es gibt dann vielleicht noch weitere Lösungen außerhalb der Grundmenge, aber die sind für die ins Auge gefasste Problemstellung eben nicht interessant oder unsinnig (etwa eine negative Zahl als Lösung für ein Problem, in dem eine unbekannte Laufzeit zu bestimmen ist). Im Prinzip kann als Lösungsmenge jede Teilmenge der Grundmenge auftreten: Die Lösungsmenge kann leer sein, d.h. die Gleichung hat überhaupt keine Lösung (wie z.B. die nicht erfüllbare Gleichung $x = x + 1$), sie kann genau eine Zahl enthalten, d.h. die Gleichung hat genau eine Lösung (das ist eine günstige Situation und gerade bei sinnvollen ökonomischen Fragestellungen erwartet, die eine eindeutige Antwort haben sollten), sie kann aus zwei, drei oder einer beliebigen endlichen Anzahl von Lösungen bestehen, sie kann auch unendlich viele Lösungen enthalten, und überhaupt kann jede Teilmenge der Grundmenge im Prinzip als Lösungsmenge auftreten, auch die ganze Grundmenge selbst (wie z.B. bei der allgemeingültigen Gleichung $x = x$).

Wie findet man nun die Lösung — oder die Lösungen — einer Gleichung? Ziel ist die **Auflösung nach der Unbekannten**, d.h. die Transformation der gegebenen Gleichung durch eine Reihe von Umformungen, welche die Lösungsmenge nicht verändern oder jedenfalls nicht verkleinern, in eine Gleichung der "nach x aufgelösten Form" $x = K$ wobei auf der rechten Seite eine Konstante K steht, also einer Zahl oder einem Term, der von den Parametern der Gleichung abhängt, nicht aber von der Unbekannten. Die eindeutige Lösung der Gleichung $x = K$ ist dann natürlich K, und einzig diese Zahl kommt als Lösung der ursprünglichen Gleichung in Frage; durch Einsetzen des Wertes K für x in der ursprünglichen Gleichung prüft man dann leicht nach, ob K tatsächlich Lösung ist. Leider ist die Auflösung der Gleichung nach der Unbekannten nur in sehr einfachen — aber gerade in der Wirtschaftsmathematik häufig auftretenden — Fällen möglich; in den anderen Fällen ist man auf mathematische Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Lösungen angewiesen. Auch enden die Umformungen der ursprünglichen Gleichung nicht immer mit einer Gleichung der aufgelösten Form, sondern man kann auf eine nicht erfüllbare Gleichung stoßen (wie $x + 1 = x$), in welchem Fall die ursprüngliche Gleichung gar keine Lösung hat, oder auf eine allgemeingültige Gleichung (wie $x = x$), in welchem Fall evtl. auch die ursprüngliche Gleichung von jeder Zahl gelöst wird. Manchmal sind auch Fallunterscheidungen notwendig, die zu $N \geq 2$ verschiedenen nach x aufgelösten Gleichungen führen; dann hat auch die ursprüngliche Gleichung unter Umständen N verschiedene Lösungen.

Eine **zulässige Umformung** einer Gleichung besteht in der Anwendung derselben Rechenoperation auf beide Seiten der Gleichung. Dabei gehen offenbar keine Lösungen verloren, d.h. die umgeformte Gleichung hat mindestens dieselben Lösungen wie die ursprüngliche — unter Umständen aber mehr (z.B. wenn man beide Seiten der ursprünglichen Gleichung mit Null multipliziert). Kommt man nach einer Serie von Umformungen auf eine Gleichung, deren Lösungen man alle bestimmen kann, so muss man durch sog. "Rückwärtseinsetzen" in die ursprüngliche Gleichung also noch überprüfen, welche davon auch die ursprüngliche Gleichung lösen. Damit hat man dann alle Lösungen der ursprünglichen Gleichung gefunden. Das Rückwärtseinsetzen kann man sich sparen (obwohl es als Probe immer sinnvoll ist), wenn man nur **Äquivalenzumformungen** vorgenommen hat, d.h. zulässige Umformungen, die durch eine weitere zulässige Umformung wieder rückgängig gemacht werden können. Die durch Äquivalenzumformungen entstandene Gleichung hat nämlich dieselbe Lösungsmenge wie die ursprüngliche. Hier eine (unvollständige) Liste der *Rechenoperationen, die beim Umformen von Gleichungen vorgenommen werden können:*

- Addition oder Subtraktion derselben Zahl oder desselben Terms auf beiden Seiten (Äquivalenzumformung);
- Multiplikation mit derselben Zahl oder mit demselben Term (Äquivalenzumformung, wenn die Zahl bzw. der Term $\neq 0$ ist; aber Nullstellen des Terms sind Lösungen der neuen Gleichung, nicht unbedingt der alten);
- Division mit derselben Zahl oder mit demselben Term $\neq 0$ (Äquivalenzumformung, wo der Term nicht Null ist; Nullstellen des Terms sind nicht im Definitionsbereich der neuen Gleichung, können aber Lösungen der ursprünglichen sein);
- Bildung des Kehrwertes von beiden Seiten (Äquivalenzumformung, wo beide Seiten $\neq 0$ sind; Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind aber auch die Werte von x, für die beide Seiten $= 0$ sind);
- Quadrieren beider Seiten oder Erhebung zur Potenz mit demselben Exponenten $n \in \mathbb{N}$ (für gerade n keine Äquivalenzumformung, z.B. hat $x = 1$ nur eine, $x^2 = 1^2$ aber zwei Lösungen $+1, -1$).

Im Vorgriff auf Abschnitt 1.3 (Wurzeln und Logarithmen) erwähnen wir noch folgende Operationen zur zulässigen Umfoemung von Gleichungen:

- Ziehen der nichtnegativen Wurzel auf beiden Seiten (wenn die Seiten nichtnegative Werte haben, sonst erst beide Seiten mit -1 multiplizieren, das erfordert also eine Fallunterscheidung; außerdem darf man natürlich nicht etwa auf einer Seite die positive, auf der anderen die negative Quadratwurzel ziehen — es muss ja dieselbe Rechenoperation ausgeführt werden!);
- Logarithmieren beider Seiten (wenn die Seiten positiv sind, sonst erst mit -1 multiplizieren und Fallunterscheidung; die ursprüngliche Gleichung kann auch noch Lösungen haben, für die beide Seiten $= 0$ sind).

Zu der Frage, welche Umformungen bei einer gegebenen Gleichung man denn vornehmen müsse, um sie aufzulösen, gibt es kein allgemeines Rezept als Antwort. Ziel der Umformungen ist in jedem Fall, dass die Unbekannte rechts nicht mehr vorkommt und links nur in einem möglichst einfachen Term, wie eben "x" in der aufgelösten Form. Es ist eine Sache der Erfahrung und des Geschicks bei Termumformungen, einen Weg zu finden, der zum Ziel führt. Und einen solchen Weg gibt es ja auch nicht immer; denn schon recht einfach aussehende Gleichungen sind, wie gesagt, durch Umformungen nicht auflösbar.

BEISPIELE (*zum Auflösen von Gleichungen*):

1) Ein sehr einfacher Gleichungstyp für eine Unbekannte x ist die

$$\textbf{lineare Gleichung:} \quad \boxed{ax = b},$$

wobei die sog. *Koeffizienten* a, b konkrete Zahlen sind (etwa $2x = 3$ oder $\frac{1}{3}x = \sqrt{2}$) oder reelle Parameter. Der *Normalfall* ist $a \neq 0$; dann dividiert man beide Seiten der Gleichung durch a und erhält die äquivalente aufgelöste Form $x = \frac{b}{a}$. Also ist

$$x = \frac{b}{a} \quad \text{die } \textit{eindeutige Lösung} \text{ zu} \quad ax = b, \quad \text{wenn} \quad a \neq 0.$$

Im *Ausnahmefall* $a = 0$ sind dagegen alle reellen Zahlen Lösungen der linearen Gleichung, nämlich wenn auch $b = 0$ ist, oder es gibt überhaupt keine Lösung, nämlich wenn $b \neq 0$n.

Lineare Gleichungen resultieren oft aus **Proportionalitäten** (Dreisatz), d.h. aus einem (z.B. ökonomischen) Gesetz, demzufolge eine Größe b zu einer anderen Größe a in demselben Verhältnis steht wie die Unbekannte x zu einer dritte Größe c, also $b : a = x : c$ oder (nach Multiplikation mit $a \neq 0$ und $c \neq 0$) $ax = bc$, $x = bc/a$.

Eine ganze Reihe ökonomischer Fragestellungen führt auf eine lineare Gleichung: Die Aufzinsungsformel und die Rentenformel bei einfacher Verzinsung (siehe Kap. 2)

$$K_t = \left(1 + \frac{p \cdot t}{100}\right) \cdot K_0\,, \qquad K_t = K_0 - mR + \frac{p \cdot t}{100}\left(K_0 - \frac{m+1}{2}R\right)$$

sind z.B. lineare Gleichungen für jede der darin vorkommenden Variablen K_0, K_t, p, t, R, m, wenn man die anderen Variablen jeweils als Parameter auffasst. (Bei der zweiten Gleichung muss man rechts erst die Terme mit dem Faktor K_0 und die Terme mit dem Faktor R jeweils zusammenfassen, um das zu sehen.) Die Gleichungen sind also nach jeder der vorkommenden Variablen auflösbar. Der Ausnahmefall, dass der Koeffizient vor der Unbekannten Null ist, kommt zwar formal auch vor, hat aber keine ökonomische Bedeutung. Z.B. hat die erste Gleichung, wenn $K_0 = 0$ ist und p oder t die Unbekannte, entweder keine Lösung (bei $K_t \neq 0$) oder alle Zahlen als Lösungen ($K_t = 0$) — aus einem Anfangskapital Null kann man eben außer dem Endkapital Null nichts machen, und dabei sind Zinsfuß und Laufzeit ganz egal!

2) Zu den Gleichungstypen, die sich auf lineare zurückführen lassen, gehört z.B. die

$$\textbf{gebrochen-lineare Gleichung:} \qquad \frac{ax+b}{cx+d} = r\,.$$

Dabei nehmen wir $c \neq 0$ an, sonst hat man ja einfach eine lineare Gleichung $\frac{a}{d}x + \frac{b}{d} = r$, also $\frac{a}{d}x = r - \frac{b}{d}$ (wenn auch $d = 0$ ist, so ist die Gleichung sinnlos, da die linke Seite für kein x definiert ist). Multiplikation beider Seiten mit dem Term $cx + d$ (der für Lösungen $\neq 0$ ist) gibt $ax + b = rcx + rd$, oder $(a - rc)x = rd - b$, und dies ist eine äquivalente lineare Gleichung, die im Normalfall $(a - rc) \neq 0$ genau eine Lösung $x = \frac{rd-b}{a-rc}$ hat, im Ausnahmefall $a - rc = 0$ aber alle Zahlen als Lösung oder keine. Was die ursprüngliche gebrochen-lineare Gleichung angeht, so muss man noch überprüfen, ob für die gefundenen Lösungen x der Nenner $cx{+}d \neq 0$ ist; dann und nur dann ist x auch Lösung der gebrochen-linearen Gleichung. Diese hat also genau eine Lösung, wenn $a - rc \neq 0$ und $ad - bc \neq 0$ ist, sie hat alle Zahlen $x \neq -\frac{d}{c}$ als Lösung, wenn $a - rc = 0 = rd - b$ ist, und in allen anderen Fällen hat sie überhaupt keine Lösung. Hier einige konkrete Beispiele:

$$\frac{x+1}{x-1} = 2 \iff x+1 = 2(x-1) \text{ und } x \neq 1 \iff x = 3\,,$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 1 \iff x+1 = x-1 \text{ und } x \neq 1\,, \quad \text{hat keine Lösung}\,,$$

$$\frac{2x-2}{x-1} = 2 \iff 2x-2 = 2(x-1) \text{ und } x \neq 1\,, \quad \text{hat alle } x \neq 1 \text{ als Lösungen}\,.$$

Bei der letzten Gleichung hätte man das Ergebnis natürlich sofort sehen können: Wenn der Zähler das Doppelte des Nenners ist, so hat der Bruch immer den Wert 2 (außer der Nenner ist Null und der Bruchwert nicht definiert). Ebenso bei der mittleren Gleichung: Wenn der Zähler um 2 größer ist als der Nenner, so kann der Bruchwert nie 1 sein.

3) Kompliziertere Gleichungen, in denen gebrochen-lineare Terme auftreten, wie etwa

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{kx+l}{mx+n} + r\,,$$

können unter Umständen in lineare Gleichungen umgeformt werden. Lösungen können natürlich höchstens solche Zahlen x sein, für die beide auftretenden Nenner $\neq 0$ sind. Multipliziert man dann beide Seiten der Gleichung mit dem Produkt der Nenner, so entsteht $(ax{+}b)(mx{+}n) = (kx{+}l)(cx{+}d){+}r(cx{+}d)$. Hier treten beim Ausmultiplizieren zwar Quadrate von x auf, aber wenn man Glück hat, so ist der Koeffizient von x^2 auf beiden Seiten derselbe, $am = kc$, und dann kann man die Quadrate durch Subtrahieren von $amx^2 = kcx^2$ auf beiden Seiten entfernen und hat eine lineare Gleichung für x übrig, deren Lösung(en) auch die Lösung(en) der ursprünglichen Gleichung ist (sind), soweit dafür nicht ein Nenner Null wird. Hier ein konkretes Beispiel:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{2x+1}{2x-1} + r \iff (2x-1)(x+1) = (x-1)(2x+1) + (x-1)r \text{ und } 1 \neq x \neq \frac{1}{2}$$

$$\iff (r-2)x = r \text{ und } 1 \neq x \neq \frac{1}{2} \iff x = \frac{r}{r-2}\,, \text{ wenn } r \neq \pm 2\,, \text{ sonst keine Lösung.}$$

Wenn sich allerdings die quadratischen Terme nicht herausheben, so bleibt nach Multiplikation mit den Nennern eine quadratische Gleichung über, keine lineare. Diese kann mit Quadratwurzelziehen gelöst werden (s. 1.3).

4) Bei einer Doppelbruch-Gleichung wie

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = r$$

liegt es nahe, auf beiden Seiten den Kehrwert zu bilden, um die Gleichung zu vereinfachen. Wenn $r \neq 0$ ist (sonst hat die Gleichung keine Lösung, weil ja die linke Seite nie Null werden kann), so ergibt sich die äquivalente Gleichung $1 + \frac{1}{1+x} = \frac{1}{r}$. Nach Subtraktion von 1 auf beiden Seiten ist dies eine gebrochen-lineare Gleichung wie in 2). Man kann aber, wenn $r \neq 1$ ist (sonst hat auch diese Gleichung keine Lösung), durch nochmaligen Übergang zu Kehrwerten gleich die äquivalente Form $1+x = (\frac{1}{r}-1)^{-1}$ herstellen. Ergebnis: Für $r = 0$ oder $r = 1$ hat die Gleichung keine Lösung (das hätte man von vorneherein gleich sehen können), ansonsten ist $x = (\frac{1}{r} - 1)^{-1} - 1 = \frac{2r-1}{1-r}$ die eindeutige Lösung. ■

Unter einer **algebraischen Gleichung** (oder *Polynomgleichung*) vom *Grad* $n \in \mathbb{N}$ (man sagt auch *Ordnung* statt Grad) versteht man eine Gleichung der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

mit gegebenen Zahlen $a_n \neq 0$ und $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ als sog. *Koeffizienten* der Gleichung. Nach Division mit dem führenden Koeffizienten a_n kann man ohne Einschränkung annehmen, dass dieser gleich 1 ist; die Gleichung beginnt dann $x^n + \ldots = 0$. Obwohl es sich hier noch um einen relativ einfachen Gleichungstyp handelt, kann man eine solche Gleichung im nichtlinearen Fall $n \geq 2$ nicht mehr mit den Grundrechenarten auflösen. Für *quadratische Gleichungen* ($n = 2$) gibt es noch Lösungsformeln, welche die höhere Rechenoperation des Wurzelziehens verwenden (s. 1.3), auch bei Grad $n = 3$ und $n = 4$ gibt es noch Lösungsformeln mit "verschachtelten Wurzelausdrücken", die aber weniger nützlich sind als die bekannte Lösungsformel für quadratische Gleichungen. Für Ordnungen $n \geq 5$ gibt es aber — das ist mathematisch bewiesen — keine Lösungsformeln mehr, die nur Grundrechenarten und Wurzelziehen beinhalten. Man muss sich also damit abfinden, dass algebraische Gleichungen im Allgemeinen nicht auflösbar sind, auch solche nicht, die in ökonomischem Zusammenhang auftauchen.

Z.B. ist die Effektivzinsgleichung für Annuitätsdarlehen (siehe Kap. 2; man sucht hier den unbekannten effektiven Aufzinsungsfaktor $q_* > 1$ und α, β sind Parameter)

$$q_*^n - \alpha\frac{q_*^n - 1}{q_* - 1} = \beta$$

durch Multiplikation mit $q_* - 1 > 0$ äquivalent zu der algebraischen Gleichung $(n+1)$-ter Ordnung

$$q_*^{n+1} - (\alpha+1)q_*^n - \beta q_* + \alpha + \beta = 0$$

für die Unbekannte q_*. Obwohl hier die Potenzen $q_*^2, \ldots, q_*^{n-1}$ der Unbekannten nicht auftreten, ist diese Gleichung für $n \geq 4$ nicht mehr durch eine Lösungsformel nach q_* auflösbar.

Es gibt eine mathematische Theorie der Polynomgleichungen, aus der wir zur Information die folgenden Fakten mitteilen:

- *Eine algebraische Gleichung hat höchstens so viele reellen Lösungen wie ihr Grad n;*
- *bei ungerader Ordnung n gibt es stets mindestens eine reelle Lösung;*
- *bei gerader Ordnung n aber existiert unter Umständen keine reelle Lösung.*

So hat zum Beispiel $x^n + 1 = 0$ für gerade $n = 2m \in \mathbb{N}$ keine reelle Lösung, weil $x^{2m} = (x^m)^2 \geq 0$ ist, die linke Seite der Gleichung also immer ≥ 1. Dass bei ungerader Ordnung $n = 2m+1$ immer mindestens eine reelle Lösung existiert, liegt daran, dass die linke Seite $x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + \ldots$ dann für große Werte des Betrags $|x|$ dasselbe Vorzeichen wie x hat, also positiv ist für große positive Werte von x und negativ für absolut große negative Werte (die Potenzen niederer Ordnung von x fallen im Vergleich zur führenden Potenz x^{2m+1} nicht ins Gewicht). Nach dem “Zwischenwertsatz” gibt es dann auch einen Wert von x (oder mehrere solche Werte), für den die linke Seite der Gleichung Null wird. Eine Gleichung n-ter Ordnung, die n gegebene Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als Lösungen hat, erhält man durch Ausmultiplizieren des Produkts $(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ und Zusammenfassen der Potenzen von x mit gleichen Exponenten. Es entsteht dann ein polynomialer Term $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, der genau dann $= 0$ wird, wenn x eine der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist; denn ein Produkt hat genau dann den Wert Null, wenn mindestens einer seiner Faktoren, hier also ein Faktor $x - x_i$, den Wert Null hat.

Die letzte Bemerkung ist auch die Grundlage für ein *Reduktionsverfahren*, das man anwenden kann, wenn man eine Lösung ξ der algebraischen Gleichung $a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ geraten hat (indem man einige Zahlen ausprobiert hat oder aus dem Kontext der Aufgabenstellung schon eine Lösung kennt). Man kann dann die linke Seite der Gleichung in der Form $(x - \xi) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0)$ faktorisieren. Diese Prozedur nennt man **Abspalten des Linearfaktors $x - \xi$** oder **Polynomdivision durch den Linearfaktor**. Die Koeffizienten b_{n-1}, $b_{n-2}, \ldots$, bestimmt man dabei in dieser Reihenfolge so, dass nach Ausmultiplizieren des Produkts $(x - \xi) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0)$ und Sammeln der Terme mit gleichen Potenzen von x gerade die Koeffizienten a_n, $a_{n-1}, \ldots$ vor x^n, $x^{n-1}, \ldots$ entstehen. Da die linke Seite der Gleichung nun in der Produktform $(x - \xi) \cdot (b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0)$ geschrieben ist, sieht man, dass sie den Wert Null genau dann annimmt, wenn $x = \xi$ ist oder wenn x eine Lösung der Polynomgleichung $b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0 = 0$ ist. Die Reduktion besteht darin, dass der Grad der letzten Gleichung um 1 niedriger ist als bei der ursprünglichen Gleichung. Wenn die neue Gleichung keine reelle Lösung besitzt, so war $x = \xi$ die einzige Lösung der Ausgangsgleichung. Wenn man andererseits zu dieser neuen Gleichung wieder eine Lösung raten kann, so lässt sich das Verfahren erneut anwenden, und mit Glück kommt man so fortfahrend vielleicht bis zu einer Gleichung vom Grad 1, also zu einer linearen Gleichung, und hat dann alle Lösungen der ursprünglichen algebraischen Gleichung gefunden. Hier zwei konkrete

BEISPIELE (*zur Lösung algebraischer Gleichungen mit dem Reduktionsverfahren*):

1)
$$x^2 - x - 2 = 0\,.$$

Bei dieser quadratischen Gleichung erkennt man die Lösung $x = 2$ und findet die Faktorisierung $x^2 - x - 2 = (x - 2) \cdot (x + 1)$. (Der erste Koeffizient im letzten Linearfaktor muss 1 sein, damit beim Ausmultiplizieren $1 \cdot x^2$ entsteht, der zweite muss $+1$ sein, damit beim Ausmultiplizieren der konstante Term -2 entsteht). Also sind $x = 2$ und $x = -1$ die Lösungen der quadratischen Gleichung.

2)
$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0\,.$$

Bei dieser kubischen (d.h. Grad 3) Gleichung erkennt man sofort die Lösung $x = 1$ und findet die Faktorisierung der linken Seite $(x - 1) \cdot (x^2 + 1)$ (die man hier z.B. sieht, indem man $x^3 - x^2 = (x - 1) \cdot x^2$ schreibt; man kann für den zweiten Faktor der Zerlegung auch $ax^2 + bx + c$ ansetzen und dann a, b, c der Reihe nach so bestimmen, dass beim Ausmultiplizieren die linke Seite der Gleichung entsteht). Da $x^2 + 1$ für reelle x nie Null wird, ist folglich $x = 1$ auch die einzige Lösung der kubischen Gleichung. ■

Zum Schluss dieses Abschnitts geben wir zur Warnung noch drei Beispiele von Fehlern, die beim Lösen von Gleichungen nicht selten gemacht werden:

$$\frac{2x+6}{x+3} = 1\,.$$

Bei dieser Gleichung multipliziert man mit $x+3$ und erhält $2x+6 = x+3$, also $x = -3$ als eindeutige Lösung??? — Aber für $x = -3$ ist der Nenner in der ursprünglichen Gleichung Null, also handelt es sich hier nicht um eine Lösung, und die Gleichung ist überhaupt nicht lösbar! (Der Fehler war, das Rückwärtseinsetzen zu unterlassen; Multiplikation mit einem Term, der Null werden kann, ist keine Äquivalenzumformung, sondern kann zu einer Gleichung mit *mehr* Lösungen führen als die Ausgangsgleichung.)

Bei der Gleichung

$$x^3 + 1 = x^2 + 2x + 1\,,$$

wird man als Kenner der binomischen und trinomischen Formeln sofort sehen, dass die rechte Seite $(x+1)^2$ ist und der Faktor $x+1$ auch auf der linken Seite $(x+1)(x^2-x+1)$ ausgeklammert werden kann. Nach Kürzen dieses Faktors erhält man dann die Gleichung $x^2 - x + 1 = x + 1$, also $x^2 - 2x = 0$ bzw. $x \cdot (x-2) = 0$, d.h. $x = 0$ und $x = 2$ sind die Lösungen??? — Aber $x = -1$ ist auch eine Lösung der ursprünglichen Gleichung, die hier übersehen wurde! (Der Fehler war hier, zu vergessen, dass Division mit einem Term, der Null werden kann, keine Äquivalenzumformung ist, sondern zu einer neuen Gleichung führen kann, die *weniger* Lösungen hat als die ursprüngliche.)

Bei der dritten Gleichung

$$(x+1)^2 = (x-1)^2$$

liegt es nahe, aus beiden Seiten die Quadratwurzel zu ziehen. Man erhält dann die lineare Gleichung $x+1 = x-1$, die keine Lösung hat, also besitzt auch die ursprüngliche Gleichung keine Lösung??? — Aber $x = 0$ ist offenbar doch eine Lösung! (Der Fehler war hier, dass man auf beiden Seiten nicht *dieselbe* Rechenoperation angewendet hat; denn für $-1 < x < 1$ ist $x+1$ die positive Quadratwurzel aus $(x+1)^2$, aber $x-1$ die negative Quadratwurzel aus $(x-1)^2$. Dieser Fehler bei der Rechnung mit Quadratwurzeln wird drastisch durch die unkorrekte Gleichungskette $-1 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1^2} = 1$ demonstriert.) Wurzelziehen auf beiden Seiten einer Gleichung ist nur dann zulässig, wenn man auf beiden Seiten die positive Wurzel zieht (oder auf beiden Seiten die negative Wurzel, sofern beide Seiten nicht Null sind). Für den Bereich $-1 < x < 1$ der Unbekannten x hätte man die radizierte Gleichung in der äquivalenten Form $x + 1 = -(x-1)$ schreiben müssen und dann die Lösung $x = 0$ auch gefunden. (Für die Bereiche $x \geq 1$ und $x \leq -1$ ist dagegen $x + 1 = x - 1$ äquivalent, daher gibt es in diesen Bereichen keine weitere Lösung der ursprünglichen Gleichung und $x = 0$ ist die einzige.) Korrekt wäre es auch gewesen, für alle Werte von x die nichtnegativen Wurzeln in Form von Beträgen zu schreiben und dann die Gleichung $|x+1| = |x-1|$ durch Fallunterscheidungen zu lösen (vgl. 1.4).