Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

(K. Steffen, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, WS 2006/07)

1.4 Die Ordnung der Zahlen, Rechnen mit Ungleichungen

Der Bereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen hat neben seiner durch die Grundrechenarten gegebenen algebraischen Grundstruktur noch eine weitere fundamentale Struktur, die den *Größenvergleich von Zahlen* ermöglicht. Das ist naturgemäß für die Ökonomie von größter Bedeutung: Alle ökonomischen Beurteilungen und Entscheidungen sind letztlich auf den Größenvergleich zwischen Zahlen (Kosten, Umsätze, Gewinne,...) gegründet!

DISKUSSION (die Ordnung auf dem Zahlbereich $\mathbb{R}$):

1) Der Bereich der reellen Zahlen ist mit einer Ordnungsstruktur versehen, die in der Mathematik **totale Ordnung** genannt wird. Das bedeutet folgendes:

- *Für je zwei reelle Zahlen x, y ist erklärt, ob* $\boldsymbol{x}$ **kleiner als** $\boldsymbol{y}$ *ist, notiert* $\boldsymbol{x < y}$, *oder nicht, und es gelten dabei für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ die folgenden Ordnungsgesetze:*

  entweder $x < y$ *oder* $y < x$ *oder* $x = y$;

  und:

  wenn $x < y$ *und* $y < z$ *ist, so gilt auch* $x < z$.

Für $x < y$ sagt man auch, dass $\boldsymbol{y}$ **größer als** $\boldsymbol{x}$ ist, und schreibt dafür $\boldsymbol{y > x}$. Gelegentlich wird hierfür auch formuliert, dass x (im Sinne der Ordnung) *vor* y kommt und y *nach* x. Außerdem führt man die Notation $\boldsymbol{x \leq y}$ ein, gelesen $\boldsymbol{x}$ **kleiner oder gleich** $\boldsymbol{y}$, sowie $\boldsymbol{y \geq x}$, gelesen $\boldsymbol{y}$ **größer oder gleich** $\boldsymbol{x}$, um auszudrücken, dass $x < y$ oder $x = y$ gilt. Eine Aussage der Form $x \leq y$ oder $y \geq x$ wird auch **schwache Ungleichung** genannt, im Unterschied zu einer **starken Ungleichung** $x < y$ oder $y > x$ oder $x \neq y$, bei der Gleichheit ausgeschlossen ist (auch *strenge* oder *strikte* Ungleichung genannt).

Die entscheidende Eigenschaft einer totalen Ordnung auf einer Menge ist *die Vergleichbarkeit aller Elemente*; das ist das erste oben angegebene Ordnungsgesetz: Von zwei verschiedenen Elementen ist stets eines im Sinne der Ordnung kleiner als das andere. (Es gibt sog. partielle Ordnungen, bei denen das anders ist. Man kann z.B. an eine Einteilung der Menge in verschiedene "Hierarchieklassen" denken, wobei Elemente in niedrigeren Hierarchieklassen kleiner sind als solche in höheren Klassen, aber Elemente innerhalb derselben Klasse nicht vergleichbar sind, d.h. keines ist kleiner als das andere.) Das zweite oben angegebene Ordnungsgesetz, die sog. *Transitivität*, ist für jeden Ordnungsbegriff unverzichtbar: Wenn x vor y kommt und y vor z, so kommt eben x vor z. (Wenn das nicht gilt, wie etwa bei der Anordnung der Elemente auf einer Kreislinie, so liegt kein sinnvoller Ordnungsbegriff vor.) Bei einer totalen Ordnung kann man gewissermaßen alle Elemente in einer Linie aufreihen, so dass kleinere immer weiter links stehen als größere; deshalb spricht man hier auch von einer "*linearen Ordnung*".

Bei der Veranschaulichung der reellen Zahlen als Punkte auf dem Zahlenstrahl entsprechen die kleineren Zahlen x Punkten, die weiter links liegen als die Punkte, die zu größeren Zahlen y gehören. Für ganze Zahlen bedeutet $m < n$, dass man n aus m durch Addition einer natürlichen Zahl (nämlich $n - m$) erhält; auf dem Zahlenstrahl gelangt man dann von m aus durch ein- oder mehrfaches Abtragen einer Einheitslänge nach rechts zu n. Für

rationale Zahlen $r = \frac{k}{l}$ und $t = \frac{m}{n}$ mit natürlichen Nennern erfolgt der Größenvergleich dadurch, dass man die Brüche gleichnamig macht und die Zähler vergleicht; also ist von den beiden Zahlen $r = \frac{kn}{ln}$ und $t = \frac{lm}{ln}$ diejenige die kleinere, die den kleineren Zähler hat (sofern $r \neq t$). Von zwei verschiedenen reellen Zahlen $x > 0$ und $y > 0$ ist diejenige die größere, die eine *lexikographisch größere Ziffernfolge* hat, d.h. an der ersten Stelle von links, bei der ein Unterschied auftritt, hat sie die größere Ziffer. (Dabei sind die Dezimaldarstellungen nach links durch unendlich viele vorangestellte Nullen aufzufüllen und bei abbrechenden Dezimalbrüchen auch nach rechts; ein Dezimalbruch, der mit lauter Ziffern 9 endet, muss also so umgeschrieben werden, dass er am Ende lauter Nullen hat.) *Es ist gerade der Vorteil der Dezimaldarstellung, dass man den Größenvergleich für Zahlen direkt an den Ziffernfolgen ablesen kann!*

2) Reelle Zahlen, die größer als Null sind, nennt man **positiv**, solche die kleiner als Null sind, **negativ**. Im Fall $x \geq 0$, wenn also x positiv oder Null sein kann, aber nicht negativ, nennen wir die Zahl x **nichtnegativ**, im Fall $x \leq 0$ entsprechend **nichtpositiv**. Die Menge der positiven, nichtnegativen, negativen bzw. nichtpositiven reellen Zahlen notieren wir mit $\mathbb{R}_{>0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_{<0}$, bzw. $\mathbb{R}_{\leq 0} = \mathbb{R}_{<0} \cup \{0\}$. Auf dem Zahlenstrahl liegen die positiven Zahlen rechts von Null, die negativen links davon. Die Gegenzahlen zu positiven Zahlen sind negativ und umgekehrt. Alle natürlichen Zahlen sind positiv.

3) In einer total geordneten Menge wie $\mathbb{R}$ existiert nicht nur zu je zwei Elementen ein größtes, sondern auch zu endlich vielen gegebenen Elementen $x_1, \ldots, x_n$. Dazu nimmt man die größere Zahl y_2 von x_1 und x_2 (wenn $x_1 = x_2$ ist, so setze $y_2 := x_2$), dann die größere Zahl y_3 von y_2 und x_3 und so fort, bis man nach endlich vielen Schritten mit der größten Zahl y_n von $x_1, \ldots, x_n$ endet. Diese Zahl heißt das **Maximum** von $x_1, \ldots, x_n$. Entsprechend erklärt man das **Minimum** von endlich vielen Zahlen. Als Notationen dafür verwendet man

$$\max(x_1, \ldots, x_n) \quad := \quad \text{die größte Zahl von} \quad x_1, \ldots, x_n .$$

$$\min(x_1, \ldots, x_n) \quad := \quad \text{die kleinste Zahl von} \quad x_1, \ldots, x_n .$$

4) Für unendliche Mengen von Zahlen sieht die Sache im Allgemeinen anders aus: Zwar *hat jede nichtleere Menge von natürlichen Zahlen ein kleinstes Element* (das ist eine fundamentale Eigenschaft der Ordnung auf $\mathbb{N}$), aber nicht unbedingt ein größtes, z.B. offenbar $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ selbst nicht. Und die Menge der Stammbrüche $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ hat ein größtes Element, aber kein kleinstes, und es gibt natürlich auch Teilmengen von $\mathbb{R}$ wie etwa $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ selbst, die weder ein größtes, noch ein kleinstes Element besitzen. Wir sagen, dass eine Menge M von reellen Zahlen **von oben beschränkt** ist, wenn es darin nicht beliebig große Zahlen gibt, d.h. wenn ein Zahl $s \in \mathbb{R}$ existiert, eine sog. **obere Schranke** für M, mit $x \leq s$ für alle $x \in M$. Entsprechend erklärt man eine **untere Schranke** für M und nennt M **von unten beschränkt**, wenn es eine untere Schranke gibt. Die Menge M heißt **beschränkt**, wenn sie von oben und unten beschränkt ist. Es ist nun eine fundamentale sog. *Vollständigkeitseigenschaft* der reellen Zahlen, dass es zu jeder (nichtleeren) von oben beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}$ eine *kleinste obere Schranke* s^* gibt, die **obere Grenze** oder **das Supremum** der Menge M genannt wird. Dies bedeutet, dass alle Zahlen $x \in M$ kleiner oder gleich s^* sind, dass aber jeder kleinere Wert $s < s^*$ durch Zahlen x aus M übertroffen wird. Entsprechend hat eine von unten beschränkte nichtleere Teilmange M von $\mathbb{R}$ eine *größte untere Schranke* s_*, die **untere Grenze** oder **Infimum** von M heißt. Gebräuchliche Notationen für Supremum bzw. Infimum von M sind

$$\sup M \quad \text{oder} \quad \sup_{x \in M} x \qquad \text{bzw.} \qquad \inf M \quad \text{oder} \quad \inf_{x \in M} x .$$

Wenn eine Menge in $\mathbb{R}$ ein Maximum hat, ein größtes Element, so ist dieses auch das Supremum, und wenn sie ein Minimum besitzt, ein kleinstes Element, so ist dies auch das Infimum. Das Umgekehrte gilt aber nicht, weil Supremum bzw. Infimum nicht zur fraglichen Menge gehören müssen. Zum Beispiel ist 0 das Infimum der Menge der Stammbrüche, die kein Minimum hat; denn alle Stammbrüche sind positiv, und zu jeder positiven Zahl s gibt es Stammbrüche $\frac{1}{n}$, die kleiner als s sind. Man hat dazu die natürliche Zahl n größer als $\frac{1}{s}$ zu wählen; das geht, weil es **beliebig große natürliche Zahlen** in $\mathbb{R}$ gibt. Dies ist eine weitere fundamentale Eigenschaft der Ordnung der reellen Zahlen, genannt die *Archimedische Eigenschaft.* (Man kann sie auch aus der Vollständigkeitseigenschaft folgern, indem man bemerkt, dass $\mathbb{N}$ keine obere Grenze in $\mathbb{R}$ haben kann.)

5) Für die Messung der "Größe" von negativen reellen Zahlen wird oft deren positive Gegenzahl verwendet. Z.B. stellt man eine Schuld auf einem überzogenen Konto oft als negativen Kontostand $-K$ dar, spricht aber von einer Schuld der (positiven) Größe K. Diese Sichtweise wird formalisiert durch die Einführung der Größe $|x|$, genannt **Absolutbetrag** oder **Betrag** der reellen Zahl x und definiert durch

$$|x| = |-x| := \max(x,-x) = \begin{cases} x, & \text{wenn} \quad x \geq 0\,, \\ -x, & \text{wenn} \quad x \leq 0\,. \end{cases}$$

Der Betrag $|x|$ von x ist positiv, außer $|x| = 0$ im Falle $x = 0$, und er misst gewissermaßen die *absolute Größe* der Zahl x. Wir sagen daher, dass eine Zahl x *absolut größer* ist als eine andere Zahl y wenn $|x| > |y|$ gilt. Wenn man von "großen" oder "kleinen" reellen Zahlen spricht, so meint man dies meist im absoluten Sinn. Eine Zahl wie $-10^6 = -1\,000\,000$, die sehr viel kleiner als Null ist, wird man in diesem Sinne nicht "klein" nennen, sondern besser "negativ und absolut groß", weil ihr Betrag $10^6 = 1\,000\,000$ eben eine große positive Zahl ist. Der Betrag der Differenz $|x-y|$ heißt der **Abstand von x zu y** auf der Zahlengeraden, und gibt die Länge der Strecke von x nach y an (in der Längeneinheit, die dem Abstand von 0 zu 1 entspricht).

Als Rechenregel für den Betrag vermerken wir neben $|x| = |-x| \geq 0$ die

$$\textbf{Multiplikativität:} \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \text{und} \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{wenn} \quad y \neq 0\,.$$

Diese Regel ergibt sich sofort, indem man links $|x|$ oder $-|x|$ für x einsetzt und $|y|$ oder $-|y|$ für y, jenachdem ob die Zahlen positiv sind oder nicht. Ungleichungen für den Betrag und den Abstand diskutieren wir weiter unten. Weil schon die Definition des Betrags $|x|$ auf einer Fallunterscheidung beruht ($x \geq 0$ oder $x \leq 0$), *muss man beim Rechnen mit Absolutbeträgen sehr oft Fallunterscheidungen vornehmen.*

6) Wir sagen von drei reellen Zahlen x, y, z, dass **$x \in \mathbb{R}$ zwischen y und z liegt**, wenn $y \leq x \leq z$ oder $z \leq x \leq y$ gilt. Soll dabei noch Gleichheit $x = y$ oder $y = z$ ausgeschlossen werden, so nennen wir x *echt* (oder *strikt*) zwischen y und z liegend. Eine Teilmenge I von $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass I mit je zwei Zahlen y und z auch alle dazwischen liegenden Zahlen x enthält, heißt ein **Intervall.** Die Intervalle in $\mathbb{R}$ sind wichtig, weil sie häufig als sinnvoller Definitionsbereich für (ökonomische) Funktionen verwendet werden. Wir beschreiben im Folgenden alle Intervalle, die es gibt:

Man unterscheidet beschränkte und unbeschränkte Intervalle. Jedes nichtleere beschränkte Intervall hat zwei (evtl. zusammenfallende) **Randpunkte** $a \leq b$ (auch *Endpunkte* des Intervalls genannt; a heißt auch sein *Anfangspunkt*) und enthält alle Zahlen x die echt zwischen a und b liegen; es ist bestimmt durch die Festlegung, ob die Randpunkte zu dem Intervall gehören sollen oder nicht. Es gibt also folgende Typen:

beschränkte Intervalle:

$$\begin{aligned}
&\textit{offen} &&]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\,,\\
&\textit{halboffen} && [a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}\,,\\
&\textit{halboffen} &&]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}\,,\\
&\textit{abgeschlossen} && [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}\,.
\end{aligned}$$

Die abgeschlossenen beschränkten Intervalle $[a,b]$ nennt man auch *kompakt*. Der Fall $a = b$ ist dabei nicht ausgeschlossen; dann besteht $[a,b] = \{a\}$ aus einem einzigen Punkt a und die anderen Intervalle $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,b[$ enthalten gar keine Punkte, sie beschreiben dann also das *leere Intervall* $\emptyset$. Der Abstand $|a-b| = b-a$ der Randpunkte wird die **Länge des Intervalls** genannt. (Statt der "gespiegelten" eckigen Klammern in obiger suggestiver Notation, die anzeigen, dass die betreffenden Endpunkte aus dem Intervall ausgeschlossen sind, werden oft auch runde Klammern geschrieben, also z.B. $[a,b)$ statt $[a,b[$. Bei den offenen Intervallen (a,b) kann das aber zur Verwechselung mit dem Paar der Zahlen a und b führen, das üblicherweise auch mit (a,b) bezeichnet wird. Deshalb ziehen wir die Schreibweise mit den eckigen Klammern vor.)

Die unbeschränkten Intervalle haben keine endliche Länge und nur einen Endpunkt a oder b in $\mathbb{R}$ oder gar keinen Endpunkt in $\mathbb{R}$; die in $\mathbb{R}$ nicht vorhandenen Endpunkte werden dabei mit dem Symbol $\infty = +\infty$ oder $-\infty$ bezeichnet. Es gibt folgende

halbbeschränkte Intervalle:

$$\begin{aligned}
&\textit{offen} &&]a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} = \mathbb{R}_{>a}\,,\\
&\textit{offen} &&]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} = \mathbb{R}_{<b}\,,\\
&\textit{abgeschlossen} && [a,\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \le x\} = \mathbb{R}_{\ge a}\,,\\
&\textit{abgeschlossen} &&]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \le b\} = \mathbb{R}_{\le b}\,,
\end{aligned}$$

und außerdem noch das beidseitig unbeschränkte Intervall

$$]-\infty,\infty[= \mathbb{R}\,. \qquad \blacksquare$$

Bisher haben wir die Ordnung der reellen Zahlen diskutiert, ohne einen Bezug zu den Rechenoperationen in $\mathbb{R}$ herzustellen. Aber natürlich muss man wissen, wie es sich mit dem Größenvergleich von Zahlen verhält, wenn man mit ihnen Rechenoperationen ausführt. Bei welchen Rechenoperationen, die man auf beide Seiten einer Ungleichung $x < y$ anwendet, bleibt die Ungleichung erhalten? (Das heißt natürlich, dass für die aus x, y durch die Operation hervorgegangenen neuen Zahlen $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ dieselbe Ungleichung $\widetilde{x} < \widetilde{y}$ gilt.) Bei welchen Rechenoperationen kehrt sich die Ungleichung um? (D.h. $\widetilde{y} < \widetilde{x}$.) Die Antwort auf solche Fragen geben die *Rechenregeln für Ungleichungen*, welche die Ordnung mit den Grundrechenarten verbinden. Eine verwandte Frage ist die *Monotoniediskussion für einen gegebenen Rechenterm* $T(x)$; wird der Term bei Vergrößerung von x größer oder kleiner? Es ist klar, dass derartige Fragen von fundamentaler Bedeutung für die mathematische Modellierung von Wirtschaftsvorgängen sind. Man stelle sich etwa vor, dass $T(x)$ den Gewinn aus einem Produktions- und Vermarktungsvorgang in Abhängigkeit von einem dafür relevanten Parameter x angibt (etwa die Menge der produzierten Einheiten oder der Marktpreis); dann will man natürlich wissen, ob der Gewinn größer oder kleiner wird, wenn man diesen Parameter in eine bestimmte Richtung verändert. Bei der Beantwortung derartiger Fragen helfen ebenfalls die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen, die wir nun besprechen.

DISKUSSION (Rechnen mit Ungleichungen):

1) Es gibt zwei einfache Grundregeln, welche die totale Ordnung auf $\mathbb{R}$ mit Addition und Multiplikation verbinden und aus denen alle weiteren Rechenregeln für Unleichungen folgen. Diese **Grundgesetze** sind:

$$\begin{aligned} a<b \quad &\Longrightarrow \quad a+c<b+c, \\ a<b,\ \ c>0 \quad &\Longrightarrow \quad a\cdot c<b\cdot c. \end{aligned}$$

In Worten: Eine strenge Ungleichung bleibt erhalten, wenn man zu beiden Seiten dieselbe Zahl addiert oder beide Seiten mit derselben positiven (!) Zahl multipliziert. Diese Regeln gelten für alle reellen Zahlen a, b, c (mit $c > 0$ in der zweiten Regel) und sind als Axiome, also nicht zu beweisende Grundannahmen anzusehen (die man in der Mathematik rechtfertigen kann). Sie gelten offenbar auch für schwache Ungleichungen $a \leq b$ links und entsprechend rechts und ebenso für Ungleichungen "$>$" oder "$\geq$" im umgekehrten Sinne. Da Subtraktion einer Zahl die Addition der Gegenzahl ist, gilt die erste Regel analog für die Subtraktion. Außerdem ist mit c auch der Kehrwert $1/c$ positiv (s.u.), so dass die zweite Regel auch für Division mit einer positiven Zahl c gilt; denn das läuft ja auf Multiplikation mit $1/c$ hinaus. Wir können also folgende etwas allgemeinere **Grundgesetze** formulieren:

- *Eine Ungleichung bleibt erhalten, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert;*
- *Eine Ungleichung bleibt erhalten, wenn man beide Seiten mit derselben positiven (!) Zahl multipliziert oder dividiert.*

Was ist bei Multiplikation mit einer negativen Zahl c? Ist $a < b$, also $b - a > a - a = 0$, so folgt durch Multiplikation der Ungleichung $c < 0$ mit der positiven Zahl $b-a$ nun $cb - ca = c \cdot (b-a) < 0 \cdot (b-a) = 0$, also nach beidseitiger Addition von ca die *umgekehrte* Ungleichung $cb < ca$ bzw. $ac > bc$.

- *Bei Multiplikation oder Division beider Seiten mit einer negativen Zahl kehrt sich dagegen die Ungleichung um.*

Das heißt also, dass für $a < b$ (oder $a \leq b$) und $c < 0$ nun $ac > bc$ (bzw. $ac \geq bc$) gilt; die Art der Ungleichung (stark oder schwach) wird nicht verändert. **Warnung:** *der häufigste Fehler beim Rechnen mit Ungleichungen* besteht darin, dass beide Seiten mit einer negativen Zahl multipliziert werden, ohne die Ungleichung umzukehren. Das passiert insbesondere dann, wenn die negative Zahl ein "positiv aussehender" Term ist wie etwa "c" oder "$x + 1$". Ein *Beispiel*: Es ist falsch zu argumentieren, dass die Ungleichung $\frac{x}{x+1} \geq 1$ keine Lösung habe, weil nach Multiplikation mit $x+1$ die nicht erfüllbare Ungleichung $x \geq x + 1$ entstehe. So sieht die entstehende Ungleichung nur aus, wenn $x + 1 > 0$ ist; im Fall $x + 1 < 0$ entsteht aber die umgekehrte Ungleichung $x \leq x + 1$, die immer richtig ist! Also sind die Lösungen der Ungleichung genau die Zahlen $x < -1$. ($x = -1$ kommt nicht in Frage, weil dafür der Term auf der linken Seite der Ungleichung nicht definiert ist.) Fehler dieser Art beim Umformen einer Ungleichung durch beidseitige Multiplikation mit demselben Faktor vermeidet man durch sorgfältige **Fallunterscheidung:** Ist der Faktor positiv, oder ist er negativ, oder ist er Null? (Multiplikation mit Null zerstört strikte Ungleichungen und erhält schwache, weil dadurch ja die Gleichung "$0 = 0$" entsteht.)

2) Wir ziehen einige einfache Folgerungen: Ist $a > 0$, so auch $a^2 = a \cdot a > a \cdot 0 = 0$; ist aber $a < 0$, so folgt auch $a^2 = a \cdot a > a \cdot 0 = 0$, weil sich die Ungleichung ja umkehrt.

- *Quadrate von reellen Zahlen ungleich Null sind stets positiv.*

(Das Umgekehrte gilt wegen der Existenz von Quadratwurzeln aus positiven Zahlen auch: Jede positive Zahl ist ein Quadrat.) Eine banale Folgerung, die wir der Vollständigkeit halber festhalten, ist

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad -1 < 0;$$

letzteres, weil aus $-1 > 0$ der Widerspruch $0 = 1 + (-1) > 1 + 0 = 1$ folgte. Für $a > 0$ ist dann $-a = (-1) \cdot a < (-1) \cdot 0 = 0$ und $1/a > 0$, weil andernfalls der Widerspruch $1 = a \cdot \frac{1}{a} < a \cdot 0 = 0$ folgte. Für $a < 0$ ist entsprechend $-a > 0$ und $1/a < 0$.

- *Die Gegenzahl $-a$ zu einer positiven Zahl a ist negativ, die Gegenzahl zu einer negativen Zahl ist positiv;*
- *das Reziproke einer positiven Zahl ist wieder positiv, das Reziproke einer negativen Zahl ist wieder negativ.*

Eine weitere Folgerung aus 1) sind folgende **Vorzeichenregeln:**

- *Der Bereich $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen ist additiv und multiplikativ abgeschlossen; d.h. Summen und Produkte von positiven Zahlen sind wieder positiv.*
- *Summen von negativen Zahlen sind negativ; Produkte von negativen Zahlen sind positiv und Produkte von einer positiven mit einer negativen Zahl sind negativ.*

Insbesondere sind alle Zahlen positiv, die man durch fortgesetzte Addition von 1 zu 1 erhält, also *sind alle natürlichen Zahlen positiv.* Dieser wohlbekannte Sachverhalt bedarf eigentlich keiner Begründung; die Herleitung sollte eher als Bestätigung dafür gesehen werden, dass die angegebenen Grundgesetze der Ordnung wirklich sinnvoll sind. Über die Summe einer positiven und einer negativen Zahl kann man natürlich keine generelle Aussage machen: Die Summe kann negativ, Null oder positiv sein; es kommt auf die absolute Größe der Summanden an.

Eine Konsequenz der obigen Überlegungen ist übrigens, dass es im Bereich $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen keine totale Ordnung geben kann, für welche dieselben Grundgesetze wie in 1) gelten; denn dann müssten Quadrate komplexer Zahlen positiv sein. Aber man hat die komplexen Zahlen ja gerade eingeführt, um eine Quadratwurzel $\mathring{\imath}$ aus -1 zur Verfügung zu haben, also ist $-1 = \mathring{\imath}^2$ ein Quadrat einer Zahl aus $\mathbb{C}_{\neq 0}$, kann aber nicht positiv sein. Das ist der Preis, den man für die Konstruktion eines Zahlbereichs zahlen muss, in dem -1 eine Quadratwurzel hat: Es kann in einem solchen Bereich keinen sinnvollen Größenvergleich für Zahlen geben. (Und deshalb ist $\mathbb{C}$ auch für die Ökonomie uninteressant.)

3) Für den **Größenvergleich bei Summen** beliebig vieler Zahlen gilt folgendes:

- *Eine Summe wird größer, wenn man mindestens einen Summanden vergrößert und die anderen nicht verkleinert.*

Das folgt aus 1) sofort, indem man sukzessive jeweils genau einen Summanden vergrößert. Man kann das so formalisieren:

$$a_k \leq b_k \quad \text{für} \quad k = 1 \ldots n \quad \Longrightarrow \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n\,,$$

wobei rechts strenge Ungleichung "<" gilt, wenn auch links in mindestens einem Fall $a_k < b_k$ war. Man sagt dazu: *Gleichsinnige Ungleichungen darf man addieren.* Insbesondere ist eine Summe von nichtnegativen Zahlen positiv, wenn mindestens ein Summand positiv ist, und gleich Null nur, wenn schon alle Summanden Null sind. Natürlich kann man aus gegensinnigen Ungleichungen $a_1 \leq b_1$ und $a_2 \geq b_2$ nichts über den Größenvergleich zwischen $a_1 + b_1$ und $a_2 + b_2$ folgern.

4) Für den **Größenvergleich bei Produkten** beliebig vieler positiver Zahlen gilt:

- *Ein Produkt positiver Zahlen wird größer, wenn man mindestens einen Faktor vergrößert und die anderen nicht verkleinert.*

Das folgt aus 1) und 3) unmittelbar, indem man jeweils genau einen Faktor vergrößert. Man sagt auch: *Gleichsinnige Ungleichungen zwischen positiven Zahlen darf man multiplizieren*, d.h.

$$0 < a_k \leq b_k \quad \text{für } k = 1 \ldots n \quad \Longrightarrow \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \leq b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n \,,$$

wobei rechts strenge Ungleichung "<" gilt, wenn $a_k < b_k$ ist für mindestens ein k. Bei gegensinnigen Ungleichungen $0 < a_1 \leq b_1$ und $a_2 \geq b_2 > 0$ kann man für den Größenvergleich der Produkt $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ natürlich nichts folgern. Auf die Positivitätsbedingung für die Faktoren kann man übrigens nicht verzichten: Z.B. ist $-2 \leq 1$ und $-1 \leq 1$, aber $(-2) \cdot (-1) = 2 > 1 = 1 \cdot 1$. Auch bleibt ein Produkt von nichtnegativen Zahlen Null, wenn man einen Faktor vergrößert und ein anderer Faktor noch Null ist; das Produkt wird also in dieser Situation nicht größer. Sind Produkte ohne Nullfaktoren zu vergleichen, die negative Faktoren enthalten, so muss man die negativen Faktoren zählen. Ist eine Anzahl gerade, die andere ungerade, so liegt ein Produkt mit negativem und eines mit positivem Wert vor, und der Vergleich ist klar. Andernfalls ersetzt man die negativen Faktoren durch ihre positiven Gegenzahlen (evtl. unter Umkehrung der Ungleichung). Maßgebend ist die aus 2) und 3) abgeleitete **Vorzeichenregel:**

- *Ein Produkt ohne Nullfaktoren ist positiv, wenn die Anzahl seiner negativen Faktoren gerade ist, und negativ, wenn die Anzahl seiner negativen Faktoren ungerade ist.*

5) Für den **Größenvergleich von Kehrwerten** gilt:

- *Zwischen den Kehrwerten von zwei positiven oder zwei negativen Zahlen besteht die entgegengesetzte Ungleichung wie zwischen diesen Zahlen.*

Das heißt also $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ für $0 < a < b$. Zum Beweis multipliziert man die Ungleichung $a < b$ mit der gemäß 1) und 2) positiven Zahl $\frac{1}{ab}$ und erhält $\frac{1}{b} = \frac{a}{ab} < \frac{b}{ab} = \frac{1}{a}$. Das Argument gilt auch, wenn a, b beide negativ sind, weil auch dann $\frac{1}{ab} > 0$ ist. Aber wenn eine Zahl negativ, die andere positiv ist, also $a < 0 < b$, so besteht zwischen den Kehrwerten die Ungleichung $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$ in derselben Richtung, weil ja $\frac{1}{a}$ wie a negativ ist und $\frac{1}{b}$ wie b positiv. Bei Übergang zu Reziproken in einer Ungleichung ist also eine *Fallunterscheidung* erforderlich. Beispielsweise ist die Ungleichung $\frac{1}{x+1} > \frac{1}{x}$ äquivalent mit der umgekehrten Ungleichung für die Kehrwerte $x + 1 < x$, wenn $x > 0$ oder $x < -1$ ist (weil dann x und $x + 1$ beide positiv oder beide negativ sind), aber äquivalent mit der gleichsinnigen Ungleichung $x + 1 > x$ für $-1 < x < 0$, und genau diese Zahlen x sind auch die Lösungen der Ungleichung.

6) Für den **Größenvergleich bei Brüchen** folgt aus 5), 1) und 2) nun sofort:

- *der Wert eines Bruchs ist positiv, genau wenn Zähler und Nenner beide positiv oder beide negativ sind;*
- *der Wert eines Bruchs mit positivem Nenner wird vergrößert, wenn der Zähler vergrößert wird;*
- *der Wert eines Bruchs mit positivem Zähler und Nenner wird vergrößert, wenn der Nenner verkleinert wird, aber noch positiv bleibt.*

Das alles gilt nicht nur, wenn Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, sondern auch für beliebige reelle Zähler und Nenner. Was beim Vergrößern bzw. Verkleinern von Zähler und Nenner passiert, wenn diese nicht beide positiv sind, kann man sich dann sofort überlegen, indem man mit -1 multipliziert. Wichtig ist, dass der Nenner beim Verkleinern die Null nicht "überschreitet". Z.B. ist -1 kleiner als 2, aber $\frac{1}{-1} = -1$ nicht größer als $\frac{1}{2}$. Zum Größenvergleich von zwei Brüchen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ muss man diese *gleichnamig machen*, also in der Form $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$ schreiben; danach braucht man nur noch die Zähler zu vergleichen und das Vorzeichen des Nenners zu beachten. Es gilt also:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ad < bc & \text{im Fall} \quad bd > 0\,, \\ ad > bc & \text{im Fall} \quad bd < 0\,. \end{cases}$$

7) Beim **Größenvergleich von Potenzen** ist stets zu unterscheiden, ob die Basis größer oder kleiner als 1 ist (aber positiv) und ob der Exponent positiv oder negativ ist. Zunächst bemerken wir:

- *Der Wert einer Potenz mit Basis > 1 ist größer als 1, wenn der Exponent positiv ist und kleiner als 1, wenn er negativ ist; bei Basen echt zwischen 0 und 1 verhält es sich umgekehrt;*

$$a^s > 1 \quad \text{für} \quad \begin{cases} a > 1 & \text{und} \quad s > 0 \quad \text{oder} \\ 0 < a < 1 & \text{und} \quad s < 0\,; \end{cases}$$

$$a^s < 1 \quad \text{für} \quad \begin{cases} a > 1 & \text{und} \quad s < 0 \quad \text{oder} \\ 0 < a < 1 & \text{und} \quad s > 0\,; \end{cases}$$

Für $a > 1$, und $m \in \mathbb{N}$ folgt nämlich aus 4) $a^m > 1$ und $\sqrt[n]{a} > 1$ (sonst wäre ja $a = (\sqrt[n]{a})^n \leq 1$), also auch $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} > 1$, das ist die erste Behauptung für rationale Exponenten > 0, und für reelle Exponenten s folgt sie dann auch, da a^s zwischen a^r und a^t liegt für rationale r, t mit $0 < r < s < t$. Die Fälle mit $0 < a < 1$ oder $s < 0$ ergeben sich dann mit Übergang zu Reziproken gemäß 5), da $a^{-s} = (1/a)^s$ ist. Für Basen $a = 1$ oder Exponenten $s = 0$ (und $a > 0$) ist natürlich $a^s = 1$. Mit den Potenzgesetzen folgt jetzt sofort, indem wir $b^s = (\frac{b}{a})^s a^s$ und $a^t = a^{t-s}a^s$ schreiben:

- *Der Wert einer Potenz mit positivem Exponenten vergrößert sich, wenn man die (positive) Basis vergrößert; bei negativem Exponenten verkleinert er sich dagegen;*
- *Der Wert einer Potenz mit Basis > 1 vergrößert sich, wenn man den Exponenten vergrößert; bei Basen echt zwischen 0 und 1 verkleinert er sich dagegen;*

$$\begin{aligned} a^s < b^s \quad & \text{für} \quad 0 < a < b \quad \text{und} \quad s > 0\,, \\ a^s > b^s \quad & \text{für} \quad 0 < a < b \quad \text{und} \quad s < 0\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^s < a^t \quad & \text{für} \quad s < t \quad \text{und} \quad a > 1\,, \\ a^s > a^t \quad & \text{für} \quad s < t \quad \text{und} \quad 0 < a < 1\,. \end{aligned}$$

Wenn der Exponent Null ist, so passiert bei Basisvergrößerung natürlich gar nichts, ebensowenig bei Exponentenvergrößerung im Fall der Basis 1; die Potenz ist und bleibt 1.

Ein Spezialfall ist der **Größenvergleich bei Wurzeln** $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Die Wurzel wird größer, wenn man den Radikanden a in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ vergrößert. Hält man andererseits $a > 1$ fest und vergrößert die Ordnung n der Wurzel, so wird ihr Wert kleiner, weil ja der Exponent $\frac{1}{n}$ kleiner wird; bei $0 < a < 1$ wird dagegen $\sqrt[n]{a}$ größer mit wachsendem n. (Bei $n \to \infty$ strebt die Folge $\sqrt[n]{a}$ übrigens in beiden Fällen gegen den Grenzwert 1.)

Wenn wir nur ganze Exponenten n betrachten, so sind Potenzen auch für negative Basen $-a < 0$ definiert. Am besten formt man diese mittels $(-a)^n = (-1)^n a^n$ in Potenzen von positiven Basen um, bevor man einen Größenvergleich vornimmt. Dabei ist zu unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist; denn für gerade n ist $a^n = (a^{n/2})^2$ stets positiv (wenn $a \neq 0$), für ungerade n aber hat a^n dasselbe Vorzeichen wie a (d.h. a und a^n sind beide positiv oder beide negativ, wenn $a \neq 0$). Eine Folgerung ist

$$\left.\begin{array}{lll} a^n < b^n \iff a < b, & \text{wenn} & a, b \in \mathbb{R} \\ a^n < b^n \iff a < b, & \text{wenn} & a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ a^n < b^n \iff a > b, & \text{wenn} & a, b \in \mathbb{R}_{\leq 0} \end{array}\right\} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N} \text{ gerade}.$$

Also *Vorsicht beim Größenvergleich von Potenzen mit negativen Basen*!

8) Für den **Größenvergleich von Logarithmen** zur gleichen Basis $a > 1$ folgt sofort:

- *Der Wert eines Logarithmus zu einer Basis* > 1 *wird größer, wenn man den Numerus in* $\mathbb{R}_{>0}$ *vergrößert; der Wert ist positiv, genau wenn der Numerus größer als* 1 *ist und negativ, wenn der Numerus zwischen* 0 *und* 1 *liegt.*

$$\log_a y < \log_a z \iff 0 < y < z, \quad \text{wenn} \quad a > 1.$$

Das ist klar, weil aus $\log_a y \geq \log_a z$ ja $y = a^{\log_a y} \geq a^{\log_a z} = z$ folgt gemäß 7). Bei Basen zwischen 0 und 1 verhält sich alles umgekehrt wegen $\log_{1/a} y = -\log_a y$; aber mit solchen Basen arbeitet man besser nicht in der Logarithmenrechnung, wie gesagt. Der Vergleich von Logarithmen zu verschiedenen Basen a, b erfolgt mit der Umrechnungsformel $\log_b y \cdot \log_a b = \log_a y$ (wenn a, b positiv und $\neq 1$ sowie $y > 0$). ■

Für den Größenvergleich von Termen ist es wichtig, einige fundamentale Ungleichungen zu kennen, mit denen man kompliziertere Terme, deren Größe schwer zu beurteilen ist, durch einfachere Terme abschätzen kann, die für den betrachteten Bereich der Variablen stets einen kleineren Wert haben (Abschätzung nach unten) oder stets einen größeren (Abschätzung nach oben).

DISKUSSION (fundamentale Ungleichungen);

1) Die sog. **Bernoulli-Ungleichung** zum Abschätzen von Potenzen lautet:

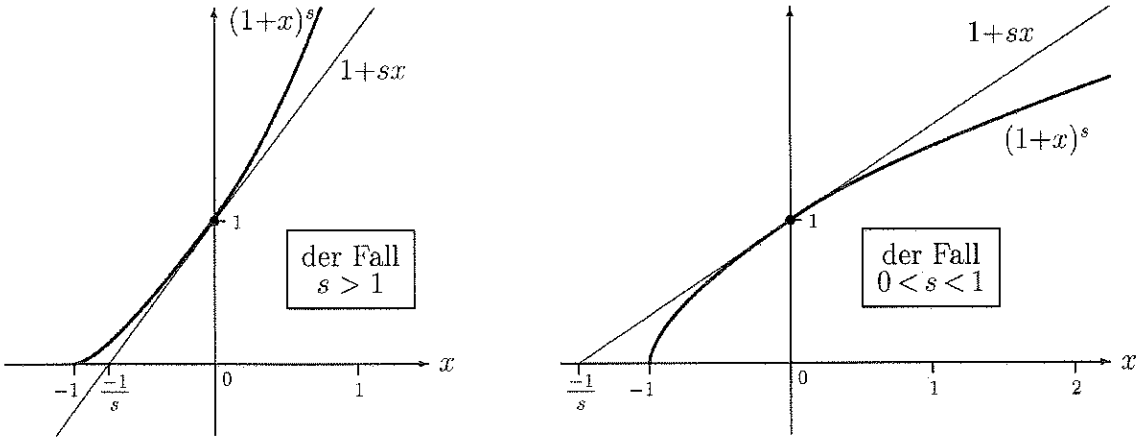
$$\left.\begin{array}{lll} (1+x)^s > 1 + sx, & \text{wenn} & s > 1 \\ (1+x)^s < 1 + sx, & \text{wenn} & 0 < s < 1 \end{array}\right\} \quad \text{und} \quad x \geq -1 \quad \text{mit} \quad x \neq 0.$$

Die zweite Ungleichung mit Exponenten $0 < s < 1$ heißt auch *umgekehrte Bernoulli-Ungleichung*, weil sie im umgekehrter Richtung gilt wie die Bernoulli-Ungleichung mit Exponent $s > 1$.

Die Bernoulli-Ungleichung hat übrigens einen *ökonomischen Hintergrund*. Betrachten wir zunächst Exponenten $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $x > 0$. Dann kann $1+x$ als Aufzinsungsfaktor für eine Zinsperiode aufgefasst werden, und $(1+x)^n$ ist der Aufzinsungsfaktor für n gleiche Perioden bei Zinsesverzinsung, $1+nx$ der entsprechende Aufzinsungsfaktor bei einfacher Verzinsung. Also ist $(1+x)^n > 1 + nx$ ökonomisch klar (und mathematisch auch: Multiplikation mit $1+x$ vergrößert $(1+x)^n$ um $x(1+x)^n > x$). Für $-1 \leq -x < 0$ kann man $1-x$ als vorschüssigen Abzinsungsfaktor auffassen, und dann ist die Ungleichung ökonomisch (und mathematisch) auch klar, weil Abzinsen für eine weitere Periode, also Multiplikation mit $1-x$ den Abzinsungsfaktor um $x(1-x)^n < x$ verkleinert. Damit ist die Bernoulli-Ungleichung für ganze Exponenten $n \geq 2$ schon bewiesen.

Für $n < m \in \mathbb{N}$ ist weiter ökonomisch klar, dass $(1 \pm \frac{1}{n}x)^n < (1 \pm \frac{1}{m}x)^m$ ist; denn der Auf- oder Abzinsungsfaktor wird größer, wenn man den Verzinsungszeitraum in mehr Zinsperioden einteilt. (Mathematisch sieht man das wie folgt: $(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}(1 + \frac{x}{n})^{-n}$ $= (1 - \frac{1}{n+1}\frac{x}{n+x})^{n+1}(1 + \frac{x}{n}) > (1 - \frac{x}{n+x})(1 + \frac{x}{n}) = 1$ für $0 \neq x > -n$.) Wenn wir hier nun x durch mx ersetzen mit $0 \neq x > -1$ und die n-te Wurzel ziehen, so folgt $1+\frac{m}{n}x < (1+x)^{m/n}$, und das ist die (offenbar auch noch für $x = -1$ gültige) Bernoulli-Ungleichung für rationale Exponenten $s = \frac{m}{n} > 1$. Für reelle Exponenten $s > 1$ folgt sie dann durch Approximation mit rationalen Exponenten (wobei man zunächst eine schwache Ungleichung erhält, mit einer kleinen Zusatzüberlegung aber dann auch wieder die strenge Ungleichung beweist), für Exponenten $0 < 1/s < 1$ ergibt sich schließlich die Ungleichung in umgekehrter Richtung, indem man in der Bernoulli-Ungleichung mit $s > 1$ zuerst x durch $\frac{1}{s}x$ ersetzt und dann beide Seiten mit Exponent $\frac{1}{s}$ potenziert.

Die Bernoulli-Unleichung hat eine einfache geometrische Interpretation, die in der Differentialrechnung klar wird: Die Graphen von Potenzfunktionen mit Exponent $s > 1$ verlaufen oberhalb ihrer Tangenten, die von "Wurzelfunktionen", d.h. Potenzfunktionen mit Exponent $0 < s < 1$ verlaufen unter ihren Tangenten. Die Bernoulli-Ungleichung besagt das für die (um 1 nach links verschobenen) Potenzfunktion $(1+x)^s$ und die Graphentangente über dem Punkt $x = 0$. Mit $(a+x)^s = a^s(1 + \frac{x}{a})^s > a^s(1+s\frac{x}{a})$ für $s > 1$ bzw. $< a^s(1+s\frac{x}{a})$ für $0 < s < 1$ (sowie jeweils $a > 0$ und $0 \neq x \geq -a$) findet man aber, dass die Aussage auch für die Graphentangente über jedem anderen Punkt a gilt.



geometrische Interpretation der Bernoulli-Ungleichungen

2) Wenn wir in 1) den Grenzübergang zu kontinuierlicher Verzinsung zum Laufzeitanteiligen Zinsfuß x vornehmen, also $(1 + \frac{1}{n}x)^n$ bei $n \to \infty$ betrachten, so erhalten wir die **fundamentale Ungleichung für die natürliche Exponentialfunktion**:

$$e^x > 1 + x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{\neq 0};$$

denn $(1 + \frac{1}{n}x)^n$ wächst mit wachsendem n, wie wir in 1) sahen (wenigstens für $n > -x$), hat als Grenzwert den Aufzinsungsfaktor bei kontinuierlicher Verzinsung e^x und ist gemäß Bernoulli-Ungleichung größer als $1 + n \cdot (\frac{1}{n}x) = 1 + x$. (Aus der Exponentialreihe $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \ldots$ kann man auch $e^x > 1 + x$ ablesen, allerdings direkt nur für $x > 0$; für $-1 < x < 0$ muss man etwas genauer hinschauen, um die Ungleichung an der Reihendarstellung zu erkennen; für $x \leq -1$ ist die Ungleichung klar, weil dann $1+x < 0 < e^x$ gilt.) Ökonomisch interpretiert besagt die Ungleichung im Fall $x > 0$ einfach, dass der kontinuierliche Aufzinsungsfaktor zu gegebener Laufzeit und gegebenem Zinsfuß größer ist als der Aufzinsungsfaktor bei einfacher Verzinsung, und im Fall $-1 < x < 0$ entspricht sie einer entsprechenden Aussage für Abzinsungsfaktoren.

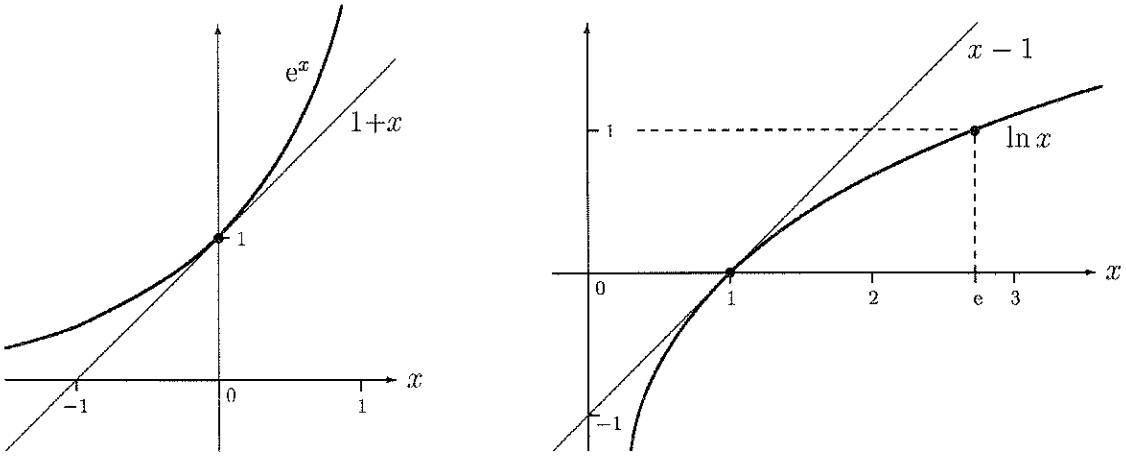
Setzen wir in der fundamentalen Ungleichung für die natürliche Exponentialfunktion $\ln x$ statt x ein, so erhalten wir die äquivalente **fundamentale Ungleichung für den natürlichen Logarithmus**:

$$\ln x < x - 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_{>0} \text{ mit } x \neq 1 .$$

Eine Abschätzung für $\ln x$ in der anderen Richtung erhält man dann mit $\ln x = -\ln \frac{1}{x} > -\frac{1}{x} + 1$ und die Potenzen von e kann man mit $e^x = 1/e^{-x} < 1/(1-x)$, solange $x > -1$ ist (!), von oben abschätzen:

$$\ln x > 1 - \frac{1}{x} \quad \text{für } 1 \neq x \in \mathbb{R}_{>0}, \qquad e^x < \frac{1}{1-x} \quad \text{für } 1 \neq x \in \mathbb{R}_{>-1} .$$

Die geometrische Interpretation der fundamentalen Ungleichungen für die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion ist, dass der Graph der ersteren über und der Graph der letzteren unter seinen Tangenten verläuft. Dabei sind die Funktionen zur natürlichen Basis e dadurch ausgezeichnet, dass die Tangente im Punkt $(0,1)$ bzw. im Punkt $(1,0)$ gerade die Steigung 1 hat. Da ln die Umkehrfunktion zu exp ist, erhält man das Bild für ln durch Spiegelung des Bildes für exp an der Diagonalen der Koordinatenachsen.



geometrische Interpretation der Ungleichungen für Exponentialfunktion und Logarithmus

3) Eine unmittelbare Folgerung aus den Ungleichungen in 1) und 2) ist, dass Potenzen x^s mit positivem Exponenten s über alle Schranken wachsen, wenn x gegen Unendlich geht, und ebenso auch die Potenzen e^x (und allgemeiner a^x für $a > 1$). Man schreibt dafür $\lim_{x\to\infty} x^s = \infty$ bzw. $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, was genau bedeutet, dass x^s und e^x jede beliebig groß vorgegebene Zahl S übertreffen, wenn nur x groß genug ist. Ebenso gilt auch $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$; denn wenn x größer als e^S ist, so gilt ja $\ln x > S$. Es gibt aber große Unterschiede in der Geschwindigkeit, mit der die Potenzen von x, e^x, $\ln x$ groß werden:

- *Die Potenz x^t strebt schneller gegen Unendlich als x^s bei $x \to \infty$, wenn der Exponent t größer ist als $s > 0$; und die Werte einer Exponentialfunktion a^x mit Basis $a > 1$ gehen schneller gegen Unendlich als die Potenz x^t (wie groß der Exponent t auch sei), die Werte der Logarithmusfunktion $\log_a x$ aber langsamer als jede Potenz x^s (mit noch so kleinem positiven Exponenten s).*

In diesem Sinne wächst also die Folge n^2 schneller als die Folge der natürlichen Zahlen n, die Kubikzahlen wachsen noch schneller u.s.w., aber die geometrische Folge 2^n wächst noch sehr viel schneller an als alle diese Potenzfolgen. Auf der anderen Seite wächst die Folge $\sqrt{n}$ langsamer als die Folge der natürlichen Zahlen, die Folge $\sqrt[3]{n}$ noch langsamer, und die Folge der Logarithmen $\log n$ wiederum noch sehr viel langsamer als alle Wurzelfolgen. (Das tausendste Glied der Logarithmenfolge ist 3, das millionste erst 6; die Folgenglieder werden aber mit wachsendem n doch beliebig groß!)

Um den Beweis der obigen Aussage über das Wachstum von Potenz- und Exponentialfolgen anzudeuten, die ja nicht evident ist, bemerken wir zunächst, dass der Quotient $x^t/x^s = x^{t-s}$ immer noch mit x gegen Unendlich geht, wenn $t > s$ ist, und dies ist gerade die Bedeutung der Aussage, dass x^t schneller als x^s gegen Unendlich geht. Für $a > 1$ und $m > t$ haben wir aus der fundamentalen Ungleichung für die Exponentialfunktion $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a} = (\mathrm{e}^{(x/m)\ln a})^m > (1 + \frac{x}{m}\ln a)^m > (\frac{1}{m}\ln a)^m x^m$. Daher ist $a^x/x^t > (\frac{1}{m}\ln a)^m x^{m-t}$, und wegen $m > t$ und $\ln a > 0$ wird der letzte Ausdruck immer noch beliebig groß für hinreichend große x; also geht a^x schneller gegen Unendlich als x^t. Auf der anderen Seite ist für $x > 1$ und $0 < \frac{1}{m} < s$ gemäß der fundamentalen Ungleichung für den Logarithmus $x^s/\ln x = \frac{1}{m}x^s/\ln x^{1/m} > \frac{1}{m}x^s/(x^{1/m} - 1) > \frac{1}{m}x^s/x^{1/m} = \frac{1}{m}x^{s-1/m}$, was wegen $s > \frac{1}{m}$ mit $x \to \infty$ beliebig groß wird; also geht x^s schneller gegen Unendlich als $\log_a x = \ln x/\ln a$.

4) Zwei oft verwendete Ungleichungen für Terme, in denen Absolutbeträge vorkommen, sind die

- **Dreiecksungleichung:** $\quad |x \pm y| \le |x| + |y|$

und die

- **umgekehrte Dreiecksungleichung:** $\quad |x \pm y| \ge \big||x| - |y|\big|$

für reelle Zahlen x, y. Man beweist sie — wie meistens beim Rechnen mit Absolutbeträgen — durch Fallunterscheidungen: Wenn x, y beide nichtnegativ oder beide nichtpositiv sind, so gilt $|x+y| = |x| + |y|$; wenn aber x positiv und y negativ ist, so gilt $|x| + |y| > x + y = |x+y|$, falls $x \ge -y$ ist, und $|x|+|y| > -(x+y) = |x+y|$, falls $x \le -y$ ist. Die umgekehrte Dreiecksungleichung folgt dann mit $|x| = |(x-y)+y| \le |x-y|+|y|$ und $|y| = |(y-x)+x| \le |y-x|+|x|$, also $|x-y| \ge \max\{|x|-|y|, |y|-|x|\} = \big||x|-|y|\big|$. Die Argumentation liefert auch Information über das *Eintreten der Gleichheit*: In der Ungleichung $|x+y| \le |x| + |y|$ tritt Gleichheit ein, genau wenn x und y nicht entgegengesetztes Vorzeichen haben, d.h. wenn beide Zahlen nichtnegativ oder beide nichtpositiv sind (mit anderen Worten: 0 liegt nicht echt zwischen x und y). Genau dann gilt auch Gleichheit in der umgekehrten Ungleichung $|x - y| \ge \big||x| - |y|\big|$.

Der Name "Dreiecksungleichung" wird verständlich, wenn man $|a - b|$ als Abstand der reellen Zahlen a und b auffasst und sie in der Form

$$|a - c| \le |a - b| + |b - c|$$

schreibt (also oben $x := a - b$ und $y := b - c$ einsetzt). Die Ungleichung besagt dann, dass die Länge der Strecke von a nach c in dem Dreieck mit Ecken a, b, c höchstens so groß ist wie die Summe der Längen der beiden anderen Dreiecksseiten von a nach b und von b nach c. Und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn b schon zwischen a und c liegt, so dass man auf dem Weg von a nach c gewissermaßen ohne Umweg über b kommt. Auf der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ gibt es freilich nur entartete Dreiecke, für die zwei Innenwinkel Null sind. Ganz genau dieselben Ungleichungen gelten aber auch für drei Punkte a, b, c in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und den Euklidischen Abstand $|a - b| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$ von Punkten $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$, und von dieser geometrischen Situation wurde der Name "Dreiecksungleichung" auch auf die Zahlengerade übertragen. ∎

Die Rechenregeln für Ungleichungen werden benutzt beim **Auflösen von Ungleichungen**. Dabei ist ähnlich wie bei Gleichungen eine zu erfüllende Ungleichung

$$T_{\text{links}}(x) < T_{\text{rechts}}(x)$$

vorgelegt mit Termen, die ein reelle Unbekannte x enthalten (und daneben noch Konstanten und evtl. Parameter; die Variable x muss auch nicht unbedingt in beiden Termen vorkommen), welche in einer gewissen Grundmenge in $\mathbb{R}$ läuft (meist ist $\mathbb{R}_{>0}$ oder $\mathbb{R}$ selbst diese Grundmenge). Statt des "Kleiner-Zeichens" kann natürlich auch ">" stehen (dann vertauschen nur die beiden Seiten der Ungleichung ihre Rollen) oder ein schwaches Ungleichungssymbol "$\leq$", "$\geq$" oder auch "$\neq$" (dann hat man zwei Ungleichungen zu betrachten, eine mit "<" und eine mit ">"). Eine **Lösung der Ungleichung** ist ein Wert von x in der Grundmenge, für den die Ungleichung nach Einsetzen in die Terme gültig ist (insbesondere müssen die Werte der Terme für dieses x definiert sein), und die **Lösungsmenge der Ungleichung** ist die Menge aller Lösungen. Anders als bei Gleichungen, wo man genau eine oder endlich viele Lösungen erwartet, treten bei Ungleichungen typischerweise Intervalle oder Vereinigungen von mehreren Intervallen als Lösungsmenge auf.

Unter dem **Auflösen einer Ungleichung** versteht man ihre Umformung in eine Gestalt, bei der die Variable x auf einer Seite steht und auf der anderen nicht mehr vorkommt, also in die Gestalt $x < c$, $x \leq c$, $x > c$ oder $x \geq c$, aus der man die Lösungen direkt ablesen kann (eben alle x in der Grundmenge, welche kleiner, kleiner oder gleich, größer bzw. größer oder gleich der Konstanten c sind). Dabei benutzt man meist **Äquivalenzumformungen**, welche die Lösungsmenge der Ungleichung nicht verändern. (Zulässige Umformungen, welche die Lösungsmenge nicht verkleinern, aber evtl. vergrößern, werden bei Ungleichungen selten eingesetzt, weil sie die Lösungsmenge unter Umständen um ganze Intervalle vergrößern; man müßte dann beim "Rückwärtseinsetzen" am Ende auch für alle Zahlen aus diesen Intervallen überprüfen, ob sie die ursprüngliche Ungleichung erfüllen.) Die Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen beruhen auf den Rechenregeln für Ungleichungen, die wir oben besprochen haben, und sie erhalten im Allgemeinen die Art der Ungleichung (streng oder schwach). Äquivalenzumformungen sind zum Beispiel:

- Addition oder Subtraktion derselben Zahl oder desselben Terms auf beiden Seiten;
- Multiplikation beider Seiten mit derselben positiven Zahl oder mit demselben positiven Term $T(x)$; (*Achtung:* Die Multiplikation mit negativen Zahlen kehrt die Ungleichung um; daher ist eine *Fallunterscheidung* $T(x) > 0$ bzw. $T(x) < 0$ bzw. $T(x) = 0$ nötig!)
- Bildung des Kehrwerts beider Seiten der Ungleichung, wenn beide Seiten positiv oder beide negativ sind; (Wenn eine Seite positiv, die andere negativ ist, so ist die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Ungleichung klar.)
- Potenzieren beider Seiten mit demselben positiven Exponenten, wenn beide Seiten der Ungleichung nichtnegativ sind;
- Exponentiieren beider Seiten der Ungleichung zu derselben Basis > 1;
- Logarithmieren beider Seiten zu einer Basis > 1, wenn beide Seiten der Ungleichung positiv sind.

Man erkennt die Notwendigkeit von **Fallunterscheidungen**. Das gilt insbesondere, wenn Absolutbeträge $|t(x)|$ von Termen in der Ungleichung (oder auch in einer Gleichung) vorkommen; denn durch die Fallunterscheidung $t(x) \geq 0$ bzw. $t(x) < 0$ kann man *die Absolutbetragssymbole beseitigen*; im ersten Fall ersetzt man einfach $|t(x)|$ durch $t(x)$, im zweiten durch $-t(x)$.

Eine **graphische Methode** zum Auflösen von Ungleichungen der Form $f(x) > c$ verläuft so: Man zeichnet den Graphen der Funktion $y = f(x)$ und bringt ihn mit der horizontalen Geraden mit Hochwert c zum Schnitt; die Lösungsmenge wird dann von den Intervallen auf der x-Achse gebildet, über denen der Graph echt oberhalb dieser Geraden verläuft. (Entsprechend bei Ungleichungen $f(x) \geq c$, $f(x) < c$, $f(x) \leq c$.)

BEISPIELE (*zum Auflösen von Ungleichungen*):

1) Die **lineare Ungleichung**

$$ax > b \qquad (\text{oder} \quad \geq, <, \leq)$$

mit $a \neq 0$ löst man so: $ax > b \iff x > \frac{b}{a}$ im Fall $a > 0$, aber $\iff x < \frac{b}{a}$ im Fall $a < 0$ (weil Multiplikation mit $\frac{1}{a} < 0$ die Ungleichung umkehrt!). Die Lösungsmenge ist also das Intervall $]\frac{b}{a}, \infty[$, wenn $a > 0$, und $]-\infty, \frac{b}{a}[$, wenn $a < 0$. Bei der schwachen Ungleichung $ax + b \geq 0$ erhält man zusätzlich noch $\frac{b}{a}$ als Lösung, also ist die Lösungsmenge $[\frac{b}{a}, \infty[$, wenn $a > 0$, und $]-\infty, \frac{b}{a}]$, wenn $a < 0$. Die Ungleichungen $ax < b$ hat als Lösungsmenge natürlich die komplementären Intervalle $]-\infty, \frac{b}{a}[$ im Fall $a > 0$ bzw. $[\frac{b}{a}, \infty[$ im Fall $a < 0$; bei $ax \leq b$ kommt der Intervallendpunkt $\frac{b}{a}$ zur Lösungsmenge hinzu.

Man kann eine lineare Ungleichung auch einfach so behandeln, dass man zunächst die Lösung x_0 der entsprechenden linearen Gleichung $ax = b$ bestimmt. Die Lösungsmenge ist dann ein halbbeschränktes Intervall mit Randpunkt x_0, und x_0 gehört zur Lösungsmenge, wenn die Ungleichung schwach ist, aber x_0 gehört nicht dazu, wenn sie streng ist. Man braucht also nur noch zu festzustellen, ob sich das Lösungsintervall von x_0 aus nach $+\infty$ oder nach $-\infty$ erstreckt, und das kann man entscheiden, indem man prüft, ob die Ungleichung für große Werte von x erfüllt ist (bei $ax > b$ z.B., wenn $a > 0$, nicht aber, wenn $a < 0$). Die beschriebene graphische Methode führt auch sofort zum Ziel.

Auf eine lineare Ungleichung in der Ökonomie stößt man z.B. bei Rentenzahlung mit einfacher Verzinsung, wenn gefragt wird, welches Anfangskapital K_0 oder welcher Zinsfuß $p\%$ oder welche Ratenhöhe R erforderlich ist, damit der Kapitalendstand K_{Ziel} nach einer gegebenen Zahl m von Rentenperioden im gegebenen Zeitraum t (Jahre) eine bestimmte Zielgröße nicht unterschreitet (z.B. die Größe 0 bei Auszahlung von Renten aus einem Guthaben). Die bei Ratenzahlung am Periodenbeginn zuständige Rentenformel (siehe Kap. 2) führt bei dieser Fragestellung auf eine lineare Ungleichung für die Unbekannte K_0 oder p oder R:

$$K_0 - mR + \frac{p \cdot t}{100}\Big(K_0 - \frac{m+1}{2}R\Big) \;\geq\; K_{\text{Ziel}}\,.$$

Allerdings ist hier zu beachten, dass nur Lösungen in einer ökonomisch sinnvollen Grundmenge sinnvoll sind; z.B. sind alle Variablen in der Rentenformel nichtnegativ. Und obwohl die lineare Ungleichung mathematische Lösungen haben kann, so hat sie bei unsinnigen Zielvorgaben doch keine ökonomisch sinnvolle Lösung. Wenn wir z.B. im Falle der Auszahlung von Renten aus einem Guthaben K_0 eine Zielvorgabe $K_{\text{Ziel}} > (1 + \frac{1}{100}pt)K_0$ machen, so hat die Ungleichung nur negative Lösungen R und die Menge der ökonomisch sinnvollen Lösungen ist leer; denn mit Auszahlungen $R \geq 0$ ist die Vorgabe nicht zu erfüllen.

2) Gebrochen-lineare Ungleichungen der Form $\frac{ax+b}{cx+d} > z$ (oder $\geq, <, , \leq$) kann man durch Multiplikation mit dem Nenner auf lineare Ungleichungen zurückführen. Doch *Achtung*! Man muss hier die *Fallunterscheidung* $cx + d > 0$ bzw. $cx + d < 0$ machen, weil Ungleichungen in verschiedener Richtung entstehen. Zum Beispiel geht

$$\frac{x}{2x-1} < \frac{1}{3}$$

durch Multiplikation mit $2x-1$ über in $x < \frac{1}{3}(2x-1)$ oder äquivalent $\frac{1}{3}x < -\frac{1}{3}$ mit den Lösungen $x < -1$; aber das gilt nur, wenn $2x-1 > 0$ ist, also $x > \frac{1}{2}$ und daher gibt es überhaupt keine Lösung mit $x > \frac{1}{2}$. Im Fall $2x-1 < 0$, also $x < \frac{1}{2}$, dagegen geht die umgeformte Ungleichung in die umgekehrte Richtung und lautet $x > \frac{1}{3}(2x-1)$ oder äquivalent $\frac{1}{3}x > -\frac{1}{3}$ mit den Lösungen $x > -1$; also sind in diesem Fall alle x mit $-1 < x < \frac{1}{2}$ Lösungen. Die Lösungsmenge der Ungleichung in $\mathbb{R}$ ist also das Intervall $]-1, \frac{1}{2}[$. ($x = \frac{1}{2}$ ist natürlich keine Lösung, weil hierfür der Nenner Null ist.)

3) Auch in anderen Fällen, in denen eine Gleichung auf eine lineare Gleichung reduziert werden kann, läßt sich eine entsprechende Ungleichung auf eine oder mehrere lineare Ungleichungen zurückführen. Betrachten wir z.B.

$$\frac{x-2}{x-1} \leq \frac{x+2}{x+1}.$$

Hier multipliziert man mit dem Faktor $(x-1)(x+1) = x^2-1$ und hat zwei Fälle zu unterscheiden. Im Fall 1 ist $x > 1$ oder $x < -1$, der Faktor also positiv; die Ungleichung ist dann äquivalent mit $(x-2)(x+1) \leq (x+2)(x-1)$ oder $x^2 - x - 2 \leq x^2 + x - 2$ oder $-x \leq x$; letzteres hat alle $x \geq 0$ als Lösungen, also erhalten wir im Fall 1 genau die Lösungen $x > 1$. Im Fall 2 ist $-1 < x < 1$ und der Faktor negativ; nach Multiplikation endet man also mit der umgekehrten Ungleichung $x^2-x-2 \geq x^2+x-2$ mit den Lösungen $x \leq 0$; im Fall 2 erhalten wir also genau die x mit $-1 < x \leq 0$ als Lösungen. Da $x = 1$ und $x = -1$ keine Lösungen sein können (weil dann Nenner in der ursprünglichen Ungleichung Null sind), ist also die Lösungsmenge eine Vereinigung von zwei Intervallen $]-1, 0] \cup]1, \infty[$.

4) Wenn Beträge in den Ungleichungen vorkommen, so kann man ganz genau wie oben vorgehen, nachdem man noch zusätzlich unterschieden hat, ob der Betrag von einer nichtnegativen oder von einer nichtpositiven Zahl gebildet wird, um so "die Betragsstriche zu eliminieren". Bei

$$|x-2| > 2 - |3-2x|$$

zum Beispiel haben wir vier Fälle $x \geq 2$, $x < 2$, $x \geq \frac{3}{2}$, und $x < \frac{3}{2}$ zu betrachten, was drei Fallunterscheidungen ergibt:

$$|x-2| > 2 - |3-2x| \iff \begin{cases} x-2 > 2+(3-2x), & \text{wenn } x \geq 2, \\ -(x-2) > 2+(3-2x), & \text{wenn } \frac{3}{2} \leq x < 2, \\ -(x-2) > 2-(3-2x), & \text{wenn } x < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Im Fall $x \geq 2$ finden wir die Lösungen $x > \frac{7}{3}$, im Fall $\frac{3}{2} \leq x < 2$ keine Lösungen (weil nur $x > 3$ die lineare Ungleichung löst), im Fall $x < \frac{3}{2}$ die Lösungen $x < 1$. Die Lösungsmenge ist also $]-\infty, 1[\cup]\frac{7}{3}, \infty[$. Genau auf dieselbe Weise hätten wir übrigens vorgehen müssen, um die "Betragsgleichung" $|x-2| = 2-|3-2x|$ zu behandeln, und hätten die (einzigen) Lösungen $x = 1$ und $x = \frac{7}{3}$ gefunden.

Analog wird folgende Ungleichung mit drei Fallunterscheidungen gelöst:

$$\left|\frac{x-2}{x+3}\right| \leq 2 \iff \begin{cases} x-2 \leq 2(x+3), & \text{wenn } x \geq 2, \\ -(x-2) \leq 2(x+3), & \text{wenn } -3 < x < 2, \\ -(x-2) \leq -2(x+3), & \text{wenn } x < -3. \end{cases}$$

Die oberste Ungleichung rechts wird erfüllt von $x \geq -8$, dieser Fall liefert also die Lösungen $x \geq 2$; die mittlere Ungleichung wird erfüllt von $x \geq -\frac{4}{3}$ und liefert alle x mit $-\frac{4}{3} \leq x < 2$ als Lösungen; die untere Ungleichung wird erfüllt von $x < -8$ und diese x sind auch Lösungen in diesem Fall. $x = -3$ ist keine Lösung, da hierfür der Nenner Null wird. Die Lösungsmenge ist damit $]-\infty, -8] \cup [-\frac{4}{3}, 2[\cup [2, \infty[=]-\infty, -8] \cup [-\frac{4}{3}, \infty[$.

4) Wie man quadratische Gleichungen mit quadratischer Ergänzung behandelt, so lassen sich auch quadratische Ungleichungen diskutieren. Zunächst hat die *spezielle quadratische Ungleichung* $x^2 < d^2$ die Lösungsmenge $]-d, d[$, wenn $d \geq 0$ ist; denn diese Ungleichung ist ja äquivalent mit $|x| = \sqrt{x^2} < d$. Entsprechend hat die Ungleichung $x^2 > d^2$ die Lösungsmenge $]-\infty, -d[\cup]d, \infty[$. Bei schwacher Ungleichung sind $x = d$ und $x = -d$ auch noch Lösungen. Die allgemeine **quadratische Ungleichung** lässt sich mit quadratischer Ergänzung und Division durch den führenden Koeffizienten $a \neq 0$ (Vorzeichen von a beachten!) auf den speziellen Fall zurückführen:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \begin{cases} > \frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac), & \text{wenn } a > 0, \\ < \frac{1}{4a^2}(b^2 - 4ac), & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

Man liest ab: Im Fall $a > 0$ und $b^2 - 4ac < 0$ sind alle $x \in \mathbb{R}$ Lösungen, im Fall $a < 0$ und $b^2 - 4ac \leq 0$ gibt es keine Lösung, in den anderen Fällen ist die Lösungsmenge entweder das Intervall $]x_1, x_2[$ zwischen den beiden Nullstellen $x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$ und $x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac}$ der quadratischen Funktion $ax^2 + bx + c$ (nämlich wenn $a < 0$ ist), oder das Äußere $]-\infty, x_1[\cup]x_2, \infty[$ dieses Intervalls (nämlich wenn $a > 0$ ist; dabei ist auch $x_1 = x_2$ möglich, also Lösungsmenge $\mathbb{R}_{\neq x_1}$). Bei schwacher Ungleichung $ax^2 + bx + c \geq 0$ kommen die beiden Nullstellen x_1, x_2 noch zur Lösungsmenge hinzu.

Wenn die quadratische Funktion $ax^2 + bx + c$ reelle Nullstellen $x_1 \leq x_2$ besitzt, so kann man die Lösungen der quadratischen Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ (oder ≥ 0) auch einfach durch **Zerlegung in Linearfaktoren**

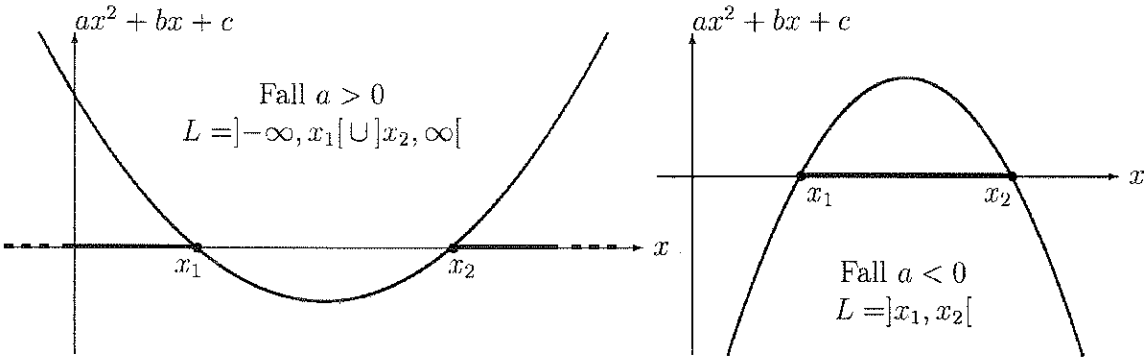
$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

ablesen. Das Produkt ist nämlich positiv, genau wenn alle drei Faktoren positiv sind oder wenn zwei der Faktoren a, $x - x_1$, $x - x_2$ negativ sind und der dritte positiv. Da die Faktoren $x - x_1$ bzw. $x - x_2$ ihr Vorzeichen nicht ändern, wenn die Variable x im Intervall zwischen den Nullstellen x_1, x_2 oder links bzw. rechts von x_1, x_2 läuft, ist dann sofort klar, dass die Lösungsmenge sich aus beschränkten oder unbeschränkten Intervallen zusammensetzt, deren Endpunkte Nullstellen sind. Bei der strikten Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ gehören die Nullstellen selbst nicht zur Lösungsmenge, also handelt es sich um die Intervalle $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, \infty[$, und da $ax^2 + bx + c$ für große Werte von $|x|$ dasselbe Vorzeichen wie a hat, ist die Lösungsmenge die Vereinigung der beiden unbeschränkten Intervalle, wenn $a > 0$, bzw. das beschränkte Intervall $]x_1, x_2[$, wenn $a < 0$. (Dabei kann auch $x_1 = x_2$ sein; dann ist die Lösungsmenge $\mathbb{R}_{\neq x_1}$ bzw. leer.) Die Lösungsmenge der schwachen Ungleichung $ax^2 + bx + c \geq 0$ entsteht natürlich aus der Lösungsmenge der strengen Ungleichung durch Hinzunahme der Nullstellen x_1, x_2.

Wir halten das Ergebnis fest, wobei wir uns auf Ungleichungen der Form $\ldots > 0$ bzw. $\ldots \geq 0$ beschränken, die man ja immer herstellen kann:

- *Hat die quadratische Funktion $ax^2 + bx + c$ die Nullstellen $x_1 \leq x_2$ in $\mathbb{R}$, so ist die Lösungsmenge der strengen quadratischen Ungleichung $ax^2 + bx + c > 0$ das offene Intervall $]x_1, x_2[$ zwischen den Nullstellen, wenn $a < 0$, bzw. das Äußere $]-\infty, x_1[\cup]x_2, \infty[$ dieses Intervalls, wenn $a > 0$. Hat die quadratische Funktion keine reelle Nullstelle, so ist die Lösungsmenge leer, wenn $a < 0$, und sie ist ganz $\mathbb{R}$, wenn $a > 0$. Die Lösungsmenge der schwachen Ungleichung $ax^2 + bx + c \geq 0$ ergibt sich jeweils durch Hinzunahme der Nullstellen.*

Mit der beschriebenen graphischen Methode sieht man das auch leicht ein. Der Graph der quadratischen Funktion ax^2+bx+c ist ja eine Parabel, die nach oben geöffnet ist im Fall $a>0$ bzw. nach unten geöffnet im Fall $a<0$. Wenn es Nullstellen $x_1 \le x_2$ gibt, so sind diese Punkte auf der x-Achse die Schnittpunkte der Achse mit der Parabel, und die Lösungsmenge der strengen Ungleichung $ax^2+bx+c>0$ besteht aus den Intervallen auf der x-Achse, über denen die Parabel oberhalb der Achse verläuft.



die Lösungsmenge L der quadratischen Ungleichung $ax^2+bx+c>0$

Wenn es keine reellen Nullstellen gibt, d.h. wenn die Parabel die x-Achse nicht schneidet, so sind alle $x \in \mathbb{R}$ Lösungen ($a>0$, die Parabel verläuft ganz oberhalb der x-Achse), oder die Ungleichung hat gar keine Lösung ($a<0$, die Parabel verläuft ganz unterhalb der Achse).

5) Auf eine quadratische Ungleichung stößt man z.B. bei der *Laufzeitberechnung für Renten bei einfacher Verzinsung* bis zum Erreichen eines vorgegebenen Zielwerts K_{Ziel} (z.B. $K_{\text{Ziel}}=0$). Ist die Laufzeit $t=m\tau$ (Jahre) in m Ratenperioden der Dauer τ eingeteilt, so lautet die oben schon angegebene Ungleichung

$$K_0 - mR + \frac{p\cdot m\cdot\tau}{100}\Big(K_0 - \frac{m+1}{2}R\Big) \ge K_{\text{Ziel}}\,.$$

Dies ist eine quadratische Ungleichung für m, und gesucht ist hier die kleinste nichtnegative ganze Lösung. Ist $K_{\text{Ziel}}<K_0$, so ist die Ungleichung für $m=0$ gültig; für große m gilt sie aber offenbar nicht. Daher gibt es zwei Lösungen $m_1<0$ und $m_2>0$ der entsprechenden quadratischen Gleichung für m, und die Lösungsmenge der Ungleichung ist $]m_1,m_2[$. Die Lösung unseres Problems ist daher $m=\lfloor m_2\rfloor$, also die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich m_2 ist.

6) Auf eine quadratische Ungleichung führt z.B. auch

$$x+1 \ge \frac{2}{x}\,.$$

Hier wird man natürlich mit x multiplizieren und erhält die quadratische Ungleichung $x^2+x\ge 2$ — aber nur im Fall $x>0$! Im anderen Fall $x<0$ ergibt sich gerade die umgekehrte quadratische Ungleichung $x^2+x\le 2$! Aus $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ entnimmt man, dass $x^2+x-2\ge 0$ die Zahlen x mit $x\le -2$ oder $x\ge 1$ als Lösungen hat, das ergibt im Fall $x>0$ also die Lösungen $x\ge 1$. Die quadratische Ungleichung $-x^2-x+2\ge 0$ hat dagegen die Lösungsmenge $[-2,1]$, und das gibt die Lösungen $-2\le x<0$ im Fall $x<0$. Die Lösungsmenge der obigen Ungleichung ist damit $[-2,0[\cup[1,\infty[$.

Ohne die sorgfältige *Fallunterscheidung* hätte man die Lösungen im Intervall $[-2,0[$ leicht übersehen!

Ähnlich führt eine Ungleichung wie

$$\frac{x-2}{x+2} < \frac{2x-1}{x+1}$$

auf verschiedene quadratische Ungleichungen, wenn man mit den Nennern multipliziert und dabei Fälle entsprechend den Vorzeichen der Nenner unterscheidet. Für $-2 < x < -1$ gilt $(x+2)(x+1) < 0$, daher ist dann die Ungleichung äquivalent zu $(x-2)(x+1) > (2x-1)(x+2)$ bzw. $x^2 - x - 2 > 2x^2 + 3x - 2$, d.h. $x(x+4) < 0$, was für alle x mit $-2 < x < -1$ erfüllt ist. Für $x > -1$ oder $x < -2$ ist die Ungleichung dagegen äquivalent zu $x(x+4) > 0$, was genau für $x > 0$ oder für $x < -4$ erfüllt ist. Die Lösungsmenge ist daher die Vereinigung von drei Intervallen $]-\infty, -4[\cup]-2, -1[\cup]0, \infty[$. (

Auch hier werden bei fehlender Sorgfalt bei der Fallunterscheidung die Lösungen zwischen -2 und -1 werden leicht übersehen!

7) Schließlich betrachten wir noch eine "Betragsungleichung"

$$|x-1| \cdot |x+1| > \frac{24}{25}.$$

Die linke Seite können wir $|(x-1)\cdot(x+1)| = |x^2-1|$ umschreiben, daher ist die Ungleichung im Falle $x^2 \geq 1$ äquivalent zu $x^2 - 1 > \frac{24}{25}$ bzw. $x^2 > (\frac{7}{5})^2$ mit den Lösungen $x > \frac{7}{5}$ und $x < -\frac{7}{5}$; im Fall $x^2 < 1$ ist sie dagegen äquivalent zu $1 - x^2 > \frac{24}{25}$ bzw. bzw. $x^2 < (\frac{1}{5})^2$ mit den Lösungen $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$. Die Lösungsmenge ist also $]-\infty, -\frac{7}{5}[\cup]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[\cup]\frac{7}{5}, \infty[$. Es ist klar, dass mit x auch $-x$ eine Lösung der ursprünglichen Ungleichung ist; daher muss die Lösungsmenge in $\mathbb{R}$ symmetrisch bzgl. des Nullpunkts sein.

8) Die Methode der **Zerlegung in Faktoren** funktioniert auch bei algebraischen Ungleichungen $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 > 0$ vom Grad $n > 2$, wenn man alle reellen Nullstellen $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_m$ kennt. Man kann dann nämlich zerlegen

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_m) \cdot q(x)$$

mit $q(x) = x^{n-m} + \ldots + b_1 x + b_0 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösungsmenge der Ungleichung besteht somit aus den $x \in \mathbb{R}$, für die eine gerade Anzahl der Linearfaktoren $x - x_j$ negativ ist, wenn $a_n > 0$, bzw. eine ungerade Anzahl, wenn $a_n < 0$. So hat z.B.

$$x^3 - x^2 + x - 1 < 0 \qquad \text{bzw.} \qquad x^3 - x^2 - x + 1 \leq 0$$

die Faktorzerlegung $(x-1)(x^2+1) < 0$ bzw. $(x+1)(x-1)^2 \leq 0$ und damit die Lösungsmenge $]-\infty, 1[$ bzw. $]-\infty, -1] \cup \{1\}$. ■

Mit den Rechenregeln für Ungleichungen, die wir angegeben haben, kann man auch noch andere Aufgaben erledigen als die Bestimmung der Lösungsmenge von Ungleichungen. Eine solche Aufgabe ist z.B. die **Anordnung verschiedener Terme der Größe nach**. Hier ist gemeint, dass verschiedene reelle "Rechenterme" $T_1(a, b, \ldots), T_2(a, b, \ldots), \ldots$ gegeben sind, die von Parametern $a, b, \ldots$ mit bekanntem Größenvergleich abhängen (z.B. $a < b < \ldots$), und die Aufgabe ist, diese Terme der Größe nach zu vergleichen, also z.B. in eine aufsteigende Reihenfolge zu bringen. Beispiele dazu findet man in 1) der nächsten Beispielserie.

Eine verwandte Aufgabenstellung liegt vor bei der **Monotonieuntersuchung eines Terms** $T(x)$. Hier handelt es sich darum, zu entscheiden, ob der Term bei Vergrößerung von x (in einer gewissen Grundmenge in $\mathbb{R}$) größer wird oder kleiner (oder gleich bleibt). Beispiele hierzu bringen wir ebenfalls in der nächsten Serie. In einfachen Fällen kann man die Monotonieuntersuchung eines Terms direkt durch Inspektion und Anwendung der behandelten Rechenregeln für Ungleichungen erledigen (z.B. wird eine Potenz mit Basis > 1 größer, wenn der Exponent vergrößert wird, und ein Bruch mit positivem Zähler und Nenner wird kleiner, wenn man den Zähler verkleinert oder den Nenner vergrößert). In komplizierteren Fällen muss man untersuchen, ob aus $x < y$ die Ungleichung $T(x) < T(y)$ folgt (oder umgekehrt), was evtl. durch Auflösen dieser Ungleichung nach x entschieden werden kann. Man kann auch versuchen, aus $T(x) \geq T(y)$ durch Umformung die Ungleichung $x \geq y$ hezuleiten; für $x < y$ folgt dann $T(x) < T(y)$ (weil die Alternative $T(x) \geq T(y)$ ja ausscheidet).

BEISPIELE (*Größenvergleich von Termen, Monotonieuntersuchung bei Termen*):

1) Für gegebene Zahlen $0 < a < 1 < b < 1/a$ sollen die Ausdrücke

$$1,\ a,\ b,\ a^a,\ a^b,\ b^a,\ b^b,\ b^{-a},\ \sqrt[a]{b},\ \sqrt[b]{a},\ \sqrt[a]{a},\ \sqrt[b]{b},\ \frac{1}{\sqrt[a]{a}}$$

der Größe nach angeordnet werden. Hier schreibt man am besten alle Terme als Potenzen der Basen a und b um. Weil mit $1 < b < 1/a$ auch $a < 1/b < 1$ ist, weiß man über die dabei auftretenden Exponenten $0 < a < 1/b < 1 < b < 1/a$. Da Potenzen mit der Basis $b > 1$ bei Vergrößerung des Exponenten größer werden, während Potenzen der Basis $0 < a < 1$ dabei kleiner werden, haben wir sofort folgende Anordnung der Größe nach:

$$a^{1/a} < a^b < a = a^1 < a^{1/b} < a^a < a^0 = 1 = b^0 < b^a < b^{1/b} < b = b^1 < b^b < b^{1/a}\,.$$

Jetzt sind nur noch die zwei Terme b^{-a} und $1/\sqrt[a]{a}$ einzuordnen. Weil $a > 0$ und $a < 1/b < 1$ ist, liegt $b^{-a} = (1/b)^a$ zwischen a^a und $1^a = 1$ und wegen $1/a > 0$ und $0 < b < 1/a$ ist $1/\sqrt[a]{a} = (1/a)^{1/a} > b^{1/a}$, also lautet die Anordnung aller Terme der Größe nach

$$a^{1/a} < a^b < a < a^{1/b} < a^a < b^{-a} < 1 < b^a < b^{1/b} < b < b^b < b^{1/a} < \frac{1}{\sqrt[a]{a}}\,.$$

2) Der Term

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$$

soll im Bereich $\mathbb{R}_{>0}$ auf sein Monotonieverhalten untersucht werden. Die Antwort kann man direkt ablesen: Bei Vergrößerung von $x > 0$ wird $1+x$ größer, also der Kehrwert $\frac{1}{1+x}$ und damit $1+\frac{1}{1+x}$ kleiner, also der Kehrwert hierzu wieder größer — und das ist gerade der zu untersuchende Term.

Diese Argumentation war gültig, weil für $x > 0$ alle auftretenden Nenner positiv sind, so dass es keine Probleme gibt. Die Argumentation gilt sogar für alle $x > -1$. Für $x = -1$ und für $x = -2$ ist der Term nicht definiert, da ein Nenner Null wird. Mit einer ähnlichen Diskussion unter Berücksichtigung des Vorzeichens von $\frac{1}{1+x}$ und von $1+\frac{1}{1+x}$ kann man sehen, dass der Term auf dem Intervall $]-\infty, -2[$ ebenfalls größer wird bei Vergrößerung von x, auf dem Intervall $]-2, -1[$ aber ist das Monotonieverhalten anders: Der Term wird kleiner, wenn man x in diesem Intervall vergrößert.

3) So einfach wie in 2) ist die Monotoniediskussion meistens nicht, weil man *entgegengesetzte Monotonietendenzen* in dem zu beurteilenden Term hat. Betrachten wir z.B.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\,, \qquad \frac{x-1}{x+1}\,, \qquad \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,, \qquad \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,.$$

In der ersten Differenz nehmen *beide* Terme ab, wenn man $x>0$ vergrößert, in den drei Brüchen nehmen Zähler *und* Nenner zu, wenn man $x>0$ vergrößert, also kann man das Monotonieverhalten des gesamten Terms nicht direkt erkennen — es liegen eben entgegengesetzte Monotonietendenzen vor, und dann kommt es darauf an, welche Tendenz überwiegt. Der Ausweg ist hier *Termumformung* in eine Gestalt, aus der man das Monotonieverhalten ablesen kann. Der erste Term geht z.B. durch Gleichnamig-Machen über in $\frac{x+1-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$, und an dieser Form des Terms ist alles klar: Der Nenner wird größer, wenn $x>0$ vergrößert wird, also wird der Term insgesamt dabei kleiner. Beim zweiten Term liegt eine Umformung nahe, mit der "x" aus dem Zähler verschwindet. Das erreicht man durch

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}\,.$$

Hier nimmt $\frac{2}{x+1}$ ab bei Vergrößerung von $x>0$, also wird $1-\frac{2}{x+1}$ größer bei Vergrößerung von x, und das gilt sogar für x aus $\mathbb{R}_{>-1}$. Beim dritten Term ist es vielleicht am einfachsten, e^x zu kürzen, dann entsteht $1/(\mathrm{e}^{-x}+1)$. Hier nimmt der Nenner ab bei Vergrößerung von $x\in\mathbb{R}$, also wird der Term größer. (Da e^{-x} mit wachsendem x sehr schnell klein wird, strebt der Term sogar sehr schnell von unten dem Grenzwert 1 zu. Mit Funktionen dieser Bauart modelliert man in der Ökonomie wachsende Größen, die einen endlichen "Sättigungswert erreichen", wenn die unabhängige Variable gegen Unendlich geht; sie heißen *logistische Funktionen.*) Der letzte Term geht mit Erweitern durch den Faktor $\sqrt{1+x}$ über in $\frac{1+x}{x\sqrt{1+x}}=\frac{1}{x\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Hier haben wir nun eine Summe von zwei Termen, die beide kleiner werden bei Vergrößerung von $x>0$, also wird auch die Summe kleiner. (Andere Möglichkeit: $\frac{\sqrt{1+x}}{x}=\sqrt{\frac{1+x}{x^2}}=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}$.) Übrigens modelliert $\frac{\sqrt{1+x}}{x}$ eine typische *Stückkostenfunktion* in Abhängigkeit von der produzierten Menge x eines Gutes.

4) Wer solche trickreichen Termumformungen wie in 3) nicht findet (es gibt auch nicht immer welche, die zum Ziel führen, also das Monotonieverhalten des Terms direkt zeigen), der ist auf den Vergleich der Terme $T(x)$, $T(y)$ für Werte $x<y$ angewiesen. Für den zweiten Term in 3) und $x,y\in\mathbb{R}_{>-1}$ z.B. geht das so:

$$\begin{aligned}
&\frac{x-1}{x+1}<\frac{y-1}{y+1} &&\iff &&(y+1)(x-1)<(x+1)(y-1)\\
\iff\quad &xy+x-y-1<xy+y-x-1 &&\iff &&2x<2y \iff x<y\,,
\end{aligned}$$

also wächst der Term mit wachsendem $x>-1$. (Dasselbe Ergebnis hätten wir erhalten, wenn wir überall mit ">" statt "<" argumentiert hätten.) Für den vierten Term in 3) verläuft die Rechnung wir folgt, wenn $x,y>0$ sind:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{\sqrt{1+y}}{y} &&\iff &&y\sqrt{1+x}<x\sqrt{1+y}\\
\iff\quad &y^2(1+x)<x^2(1+y) &&\iff &&x^2-y^2+yx^2-xy^2>0\\
\iff\quad &(x-y)(x+y+xy)>0 &&\iff &&x-y>0\,,
\end{aligned}$$

also wird dieser Term kleiner, wenn man $x>0$ vergrößert (weil die letzte Ungleichung ja $y<x$ ist; in der Rechnung haben wir benutzt, dass Quadrieren beider Seiten einer Ungleichung eine Äquivalenzumformung ist, wenn beide Seiten positiv sind, und dass $x+y+yx$ positiv ist für positive x,y).

5) Für **quadratische Terme** ist die Monotoniediskussion mit quadratischer Ergänzung einfach:

$$ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

wächst mit zunehmendem $x \geq -\frac{b}{2a}$ und mit abnehmendem $x \leq -\frac{b}{2a}$, wenn $a > 0$ ist, und fällt bei solchen Veränderungen von x, wenn $a < 0$ ist. Das ergibt sich einfach daraus, dass y^2 mit wachsendem $y \geq 0$ zunimmt, bei Vergrößerung von y im Bereich $\mathbb{R}_{\leq 0}$ aber abnimmt. Wie immer bei quadratischen Funktionen gibt also die Methode der quadratischen Ergänzung auch hier sofort die Antwort auf die gestellte Frage. Geometrisch interpretiert besagt das Ergebnis, dass für eine nach oben geöffnete Parabel ($a > 0$) der rechte Ast ab dem Scheitelpunkt aufsteigend und der linke Ast bis zum Scheitelpunkt absteigend ist, während es sich bei einer nach unten geöffneten Parabel ($a < 0$) gerade umgekehrt verhält.

6) Zum Schluss noch eine schwer zu knackende "Nuss":

$$\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$$

soll für festes $h > 0$ auf sein Monotonieverhalten im Bereich $x > 0$ untersucht werden. Es handelt sich um eine Differenz von zwei wachsenden Termen, also ist das Monotonieverhalten nicht unmittelbar klar. Der Vergleich von $\sqrt{x+h} - \sqrt{x}$ mit $\sqrt{y+h} - \sqrt{y}$ wie in 4) führt hier auch zu nichts. (Man kann die Ungleichung $\sqrt{x+h} - \sqrt{x} < \sqrt{y+h} - \sqrt{y}$ zwar durch zweifaches Quadrieren in eine quadratische Ungleichung für x umrechnen, doch wird das sehr unübersichtlich.) Aber eine geschickte Termumformung hilft auch hier: Man fasst den Term als Bruch mit Nenner 1 auf und erweitert dann mit $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$. Dann entsteht im Zähler $(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2 = x + h - x = h$ gemäß einer binomischen Formel, und der Term ist daher

$$= \frac{h}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\,.$$

Hier sind nun im Nenner beide Summanden wachsend mit $x > 0$, also wird der Term kleiner bei Vergrößerung von $x > 0$. ■

In der *Differentialrechnung* werden wir später eine sehr effektive Methode zur Feststellung des Monotonieverhaltens einer gegebenen reellen Funktion $f(x)$ einer reellen Variablen x behandeln: Man braucht nur die Ableitung $f'(x)$ zu berechnen und das Vorzeichen der Ableitungswerte $f'(x)$ zu untersuchen (was oft eine einfache Sache ist, aber auch nicht immer). Auf Intervallen, auf denen die Ableitung nur positive Werte hat, ist die Funktion $f(x)$ wachsend, auf Intervallen, auf denen die Ableitung nur negative Werte hat, ist die Funktion $f(x)$ fallend. Damit kann man dann auch Monotonieuntersuchungen wie bei dem letzten Term oben einfach und systematisch erledigen (denn die Ableitung dieser Funktion ist negativ auf $\mathbb{R}_{>0}$).