Kapitel 3: Lineare Algebra

Funktionen, mit denen Wirtschaftsvorgänge modelliert werden, hängen im Allgemeinen von von vielen Variablen oder Parametern ab. Ökonomische Zusammenhänge bzw. Restriktionen bzw. Zielvorstellungen werden daher meistens beschrieben durch Gleichungen bzw. Ungleichungen bzw. Optimierungsaufgaben für Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$ von mehreren reellen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$.

In der Linearen Algebra befassen wir uns nur mit den (abgesehen von Konstanten) einfachsten Funktionen von mehreren Veränderlichen, den sog. **linearen Funktionen.** Diese haben die Form

$$\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

mit gegebenen reellen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, den *Koeffizienten* der linearen Funktion. Genauer nennt man Funktionen dieser Form **homogen lineare Funktion**, wobei die Homogenität die Eigenschaft bezeichnet, dass man einen gemeinsamen Faktor $r \in \mathbb{R}$ aller Argumente x_j "herausziehen" kann, $\ell(rx_1, rx_2, \ldots, rx_n) = r \cdot \ell(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Auch Funktionen der allgemeineren Form $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b$, die sich von einer homogen linearen Funktion nur durch eine Konstante $b \in \mathbb{R}$ unterscheiden, werden als *lineare Funktionen* bezeichnet oder als **affin lineare Funktion**, wenn man hervorheben will, dass die allgemeinere Form mit einer nicht unbedingt verschwindenden Konstanten $b \in \mathbb{R}$ zugelassen ist.

Es wird oft gesagt, lineare Funktionen seien solche, in denen "alle Variablen nur in der ersten Potenz auftreten", aber das ist nicht korrekt: Auch bei der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ treten die Variablen x_1 und x_2 nur in der ersten Potenz auf (keine Quadrate der x_j etc.), aber sie ist nicht in der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + b$ darstellbar mit reellen Konstanten a_1, a_2, b, also eine nichtlineare Funktion! Produkte der Variablen dürfen eben auch nicht auftreten und ebensowenig nichtlineare Funktionen wie e^{x_j}, $\ln x_j$, $\sin x_j$, $x_j^{x_k}$, ...

Lineare Funktionen sind also sehr speziell — zu speziell für die mathematische Beschreibung vieler ökonomischer Zusammenhänge, die eben häufig nichtlinear sind, d.h. nicht durch lineare Funktionen mathematisch zu beschreiben. Dennoch ist Lineare Algebra wichtig: Erstens gibt es eben doch viele konkrete ökonomische Problemstellungen, die mit linearen Funktionen mathematisch modelliert und mit Linearer Algebra gelöst werden können. Zweitens ist die Lineare Algebra eine unverzichtbare Vorstufe für die Analysis von differenzierbaren Funktionen von mehreren Veränderlichen. Dort approximiert man nämlich allgemeine nichtlineare Funktionen durch lineare, um mit Hilfe von Kenntnissen aus der linearen Situation Aussagen über die nichtlinearen Probleme zu erhalten. Das geht natürlich nur, wenn man schon über Kenntnisse aus der Linearen Algebra verfügt.

3.1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

DEFINITIONEN und TERMINOLOGIE (Lineare Gleichungssysteme):
1) Eine **lineare Gleichung** für n reelle **Unbekannte** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist eine Gleichung der Form $\ell(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$ mit einer homogen linearen Funktion ℓ, lautet also ausgeschrieben

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad \text{oder} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_jx_j = b\,,$$

wobei die sog. **Koeffizienten** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der linearen Gleichung gegebene reelle Zahlen sind und ebenso die **rechte Seite** b der Gleichung eine gegebene reelle Zahl ist. Im Fall $b = 0$ spricht man von einer **homogenen linearen Gleichung**, im Fall $b \neq 0$ nennt man die Gleichung **inhomogen**; die rechte Seite b wird daher auch die **Inhomogenität** der linearen Gleichung genannt. Gesucht sind hier die Werte der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, für welche die Gleichung erfüllt ist. Eine **Lösung** der Gleichung ist also eine n-gliedrige Folge von reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wofür man $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ schreibt und **Lösungs–n–tupel** sagt, und die **Lösungsmenge** der linearen Gleichung ist die Menge all ihrer Lösungs-n-tupel, wozu man auch **allgemeine Lösung** sagt.

2) Allgemein nennt man eine n-gliedrige Folge $(x_1, \ldots, x_n)$ von Elementen $x_1, \ldots, x_n$ aus einer Grundmenge ein **n–tupel** (bzw. ein **Paar, Tripel, Quadrupel, ...** , wenn $n = 2, 3, 4, \ldots$) und die x_j seine **Komponenten, Glieder** oder **Einträge**. Die Komponenten des n-tupels müssen dabei nicht unbedingt paarweise verschieden sein, sondern Übereinstimmungen zwischen Gliedern sind erlaubt. Ein n-tupel ist dadurch bestimmt, dass man für jede seiner n Positionen (man stellt sich Plätze vor, die von 1 bis n nummeriert sind) festlegt, welcher Eintrag auf dieser Position vorgenommen wird. Dabei kommt es nicht nur auf die eingetragenen Elemente an, sondern auch auf die Positionen, an denen sie stehen. Zwei Tupel sind also dann und nur dann gleich, wenn sie erstens dieselbe Anzahl n von Gliedern haben und zweitens dieselben Einträge an denselben Positionen, $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff x_j = y_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$, und sie sind verschieden, wenn sie an mindestens einer Position verschiedene Glieder haben, $(x_1, \ldots, x_n) \neq (y_1, \ldots, y_n) \iff x_j \neq y_j$ für mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$. Also ist das Paar $(1, 2)$ verschieden vom Paar $(2, 1)$, obwohl beide 2-tupel die Einträge 1 und 2 haben (aber an verschiedenen Positionen!), und $(1, 2) \neq (1, 2, 2)$ gilt schon deswegen, weil diese beiden Tupel nicht dieselbe Zahl von Gliedern haben.

Die Menge aller n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ von reellen Zahlen heißt der **n–dimensionale reelle Zahlenraum** und wird notiert

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R} \text{ für } j = 1 \ldots n\}\,.$$

Dieser Raum $\mathbb{R}^n$ ist die Grundmenge, in der wir die Lösungen einer linearen Gleichung für n reelle Unbekannte (oder eines linearen Gleichungssystems für n Unbekannte, s.u.) suchen; die Lösungsmenge ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

3) Wenn man es mit mehreren Unbekannten zu tun hat, so meist auch mit mehreren Gleichungen. Man muss dann nicht nur die Unbekannten, sondern auch die Gleichungen nummerieren. Dies bedeutet bei mehreren linearen Gleichungen — unvermeidlicherweise —, dass wir es mit doppelt nummerierten Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ zu tun bekommen: Das erste Subskript "i" gibt die Nummer der Gleichung an, das zweite Subskript "j" die

Position des Koeffizienten in dieser Gleichung, also die Nummer der Unbekannten x_j, vor der er steht. Konkret ist also a_{35} der Koeffizient vor x_5 in der dritten linearen Gleichung. (Wenn Verwechselungsgefahr mit *einer* zweiziffrigen Nummer 35 als Index besteht, so schreibt man besser $a_{3,5}$.) Entsprechend sind auch die rechten Seiten der einzelnen Gleichungen zu nummerieren; b_i ist also die Inhomogenität der i-ten Gleichung. Ist mehr als eine Gleichung gegeben, so spricht man von einem **Gleichungssystem**, ansonsten ist die Terminologie wie bei einer Gleichung. Wenn wir im Folgenden Gleichungssysteme betrachten, so ist der Fall einer einzigen Gleichung aber immer eingeschlossen (obwohl er kein "echtes" System darstellt).

Ein **lineares Gleichungssystem**, genauer gesagt ein **System von m linearen Gleichungen für n reelle Unbekannte**, hat also die Gestalt

$$\text{(LGS)}\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad &\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ &\text{für } \ i = 1 \ldots m\,. \end{aligned}$$

Die Formelbezeichnung "(LGS)" für dieses Lineare Gleichungs-System haben wir vergeben, weil wir darauf oft Bezug nehmen werden. Hier ist m die Anzahl der Gleichungen und n die Anzahl der Unbekannten x_j. Die reellen Zahlen a_{ij} heißen die **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems und die Zahlen b_i seine **rechten Seiten**. Das lineare Gleichungssystem heißt **homogen**, wenn alle rechten Seiten Null sind, $b_1 = 0$, $b_2 = 0, \ldots$, $b_m = 0$; andernfalls ist es **inhomogen**. Das m-tupel $(b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ der rechten Seiten der m Gleichungen heißt die **Inomogenität** des Gleichungssystems oder auch seine **rechte Seite**.

Ein n-tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ von reellen Zahlen heißt eine **Lösung** des Gleichungssystems (LGS), wenn bei Einsetzen der Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für die Unbekannten in (LGS) alle m Gleichungen simultan erfüllt sind, und die Menge dieser Lösungs-n-tupel bildet die **Lösungsmenge** $L \subset \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems, auch seine **allgemeine Lösung** genannt. Die Lösungsmenge kann, wie wir sehen werden, leer sein, d.h. es gibt gar keine Lösung, weil Gleichungen des Systems im Widerspruch zueinander stehen oder weil schon eine einzelne Gleichung unerfüllbar ist. Gibt es keine Lösung, so heißt das Gleichungssystem **inkonsistent**. Ist es **konsistent**, so gibt es entweder genau eine Lösung oder gleich unendlich viele — dies ist eine Erkenntnis der Linearen Algebra.

4) Lineare Gleichungssysteme sind, wie gesagt, die einfachsten Gleichungssysteme für mehrere Unbekannte. Die scheinbare Kompliziertheit eines Gleichungssystems wie (LGS) rührt nicht von einer inneren Komplexität her, sondern nur von der Tatsache, dass wir, wenn wir eine beliebige Zahl m von linearen Gleichungen für eine beliebige Zahl n von Unbekannten betrachten wollen, gezwungen sind, die Unbekannten zu nummerieren und die Koeffizienten a_{ij} der Gleichungen sogar mit zwei Nummern zu indizieren. Hierbei ist wichtig:

- *Der erste Koeffizientenindex gibt die Nummer der Gleichung an, also der Zeile im Gleichungssystem, der zweite die Nummer der Spalte, also der Unbekannten, vor der er als Faktor steht.*

Diese Konvention über die Nummerierung behalten wir immer bei! (In der Literatur gibt es gelegentlich auch andere Konventionen.)

Dabei werden die Zeilen natürlich von oben nach unten gezählt und die Spalten von links nach rechts. Die Buchstabensymbole für die "laufenden Nummern" sind ohne Belang. Statt unserer Wahl "i" für die Zeilennummern und "j" für die Spaltennummern kann man genau so gut "k" und "l" wählen oder irgendwelche anderen Buchstabensymbole; schließlich ist $\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l = b_k$ für $k = 1 \ldots m$ genau dasselbe Gleichungssystem wie $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ für $i = 1 \ldots m$, weil beide Systeme zu gleichen Zeilen- und Spaltennummern dieselben Koeffizienten und rechten Seiten haben.

Bei übersichtlichen konkreten linearen Gleichungssystemen werden die Koeffizienten einfach als reelle Zahlen $2, -1, 3.75, \frac{11}{4}, \sqrt{e}, \log 5, \ldots$ ohne angefügte Nummern aufgeschrieben. Die Zuordnung der Nummern ergibt sich dann aus der Position im Gleichungssystem, an der ein Koeffizient steht. Die Nummerierung ist aber unvermeidlich, wenn man eine allgemeine Theorie linearer Gleichungssysteme entwickeln will. Und die Anwendung und Beibehaltung eines konsistenten Nummerierungssystems ist dabei unerlässlich; denn wenn man schon Zeilen- und Spaltennummern verwechselt, so wird man bei der Ausführung und Anwendung einer solchen Theorie nicht weit kommen!

5) Bei einer kleinen Zahl von Unbekannten unterscheidet man diese oft durch Wahl verschiedener Buchstabensymbole. Zum Beispiel schreibt man x, y oder u, v bei zwei Unbekannten, x, y, z oder u, v, w bei drei, w, x, y, z bei vier und u, v, w, x, y bei fünf Unbekannten, statt diese in der Form $x_1, \ldots, x_n$ (oder $y_1, \ldots, y_n$ oder $u_1, \ldots, u_n$ etc.) zu nummerieren mit der jeweiligen Anzahl n der Unbekannten. So ist

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

ein lineares System von zwei linearen Gleichungen für drei Unbekannte x, y, z. Bei linearen Gleichungssystemen in einem ökonomischen Kontext verwendet man für die Unbekannten, die Koeffizienten und die rechten Seiten natürlich die Buchstabensymbole, die zur Bezeichnung der entsprechenden ökonomischen Größen üblich sind. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass die Koeffizienten mit x_{ij} oder die rechten Seiten mit x_i notiert werden und die Unbekannten a_j. Für die Theorie ist es nützlich, die Notation zu fixieren und durchgängig beizubehalten; für die Anwendungen aber ist es natürlich besser, sich an die von der Anwenderseite vorgegebene Notation zu halten, so dass aus der Bezeichnung der Variablen gleich auch ihre ökonomische Bedeutung hervorgeht. Bevor man an die mathematische Diskussion eines vorgelegten linearen Gleichungssystems herangehen kann, ist jedenfalls Folgendes zu gewährleisten:

- *Es muss klar sein, was die Unbekannten sind und wieviele Unbekannte man hat, wieviele Gleichungen es gibt und was die Koeffizienten und die rechten Seiten dieser Gleichungen sind!*

Noch einige Bemerkungen zur Koeffizientennotation: Koeffizienten mit Wert 1 oder -1 werden üblicherweise nicht aufgeschrieben; man schreibt also $\ldots + x_j \ldots$ statt $\ldots + 1x_j \ldots$ bzw. $\ldots - x_j \ldots$ statt $\ldots + (-1)x_j \ldots$. Ist dagegen ein Koeffizient Null, so wird der entsprechende Summand auf der linken Seite der linearen Gleichung ganz weggelassen.

- *Bei Unbekannten, die in einer linearen Gleichung nicht explizit auftreten, ist der zugehörige Koeffizient* 0 *;*
- *bei Unbekannten, die in einer linearen Gleichung ohne Koeffizienten auftreten, ist der Koeffizient 1 (bzw. -1, wenn statt "+" das Vorzeichen "–" vorausgeht).*

Ein Subtraktionsterm $\ldots - ax_j \ldots$ in einer linearen Gleichung ist natürlich zu lesen als $\ldots + (-a)x_j \ldots$; der Koeffizient vor x_j in dieser Gleichung ist also $-a$. Die drei Koeffizienten in der oberen der beiden linearen Gleichungen des oben schon aufgeschriebenen Systems

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

sind somit (in der Reihenfolge von links nach rechts) $2, -1, 0$ und die Koeffizienten der zweiten linearen Gleichung sind $0, 1, 3$. (Es wäre ein *krasser Fehler*, als Koeffizienten von y in der ersten oder zweiten Gleichung die Zahl 0 anzugeben, weil ja vor y "kein Koeffizient vorhanden ist"!)

Spitzfindige können nun einwenden, dass dieses Gleichungssystem auch eines für vier Unbekannte w, x, y, z sein könnte, wobei der Koeffizient vor der Unbekannten w in jeder Gleichung Null ist. Das ist formal richtig; jedoch treten bei sinnvollen konkreten Problemstellungen Gleichungssysteme nicht auf, in denen alle Koeffizienten zu einer Unbekannten Null sind. Im Übrigen ergibt sich aus dem Kontext, was die Unbekannten sind. ■

FRAGEN: Die grundlegenden Fragen, deren Beantwortung man von einer guten Theorie über Gleichungssysteme (einer bestimmten Form, z.B. linear) verlangen wird, sind:

- **Existenz:** *Gibt es (mindestens) eine Lösung?*
- **Eindeutigkeit:** *Gibt es (wenn überhaupt) genau eine Lösung, oder mehrere?*
- **Beschreibung der allgemeinen Lösung:** *Läßt sich die Lösungsgesamtheit, wenn es mehrere Lösungen gibt, einfach beschreiben?*
- **Berechnung:** *Wie kann man die Lösungen konkret berechnen bzw. die Nichtexistenz von Lösungen rechnerisch feststellen?*

Mit "Lösung" ist hier natürlich, wenn es sich um ein Gleichungssystem für n Unbekannte handelt, stets ein Lösungs-n-tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ gemeint. Wir werden sehen, dass für lineare Gleichungssysteme alle vier Fragen in sehr befriedigender Weise beantwortet werden können. Für homogene lineare Gleichungssysteme bemerken wir vorab, dass die Existenzfrage immer positiv zu beantworten ist; denn wenn alle rechten seiten Null sind, so kann man einfach alle Unbekannten Null setzen und hat dann offenbar eine Lösung. Diese heißt die **Null–Lösung** oder, weil sie uninteressant ist, die **triviale Lösung** des homogenen linearen Gleichungssystems. ■

Für allgemeine (nichtlineare) Gleichungssysteme ist die Lage dagegen sehr viel schlechter: Zu den ersten drei Fragen gibt es, selbst wenn man die Struktur der zugelassenen Gleichungen stark einschränkt, kaum befriedigende Antworten, und diese erfordern unter Umständen extrem hohen mathematischen Aufwand. (Wenn man z.B. Systeme quadratischer Gleichungen oder algebraischer Gleichungen betrachtet, d.h. die linke Seite jeder Gleichung ist eine Linearkombination von Potenzprodukten der Unbekannten mit nichtnegativen ganzen Exponenten, so ist die sog. Algebraische Geometrie zuständig; das ist eine sehr anspruchsvolle und umfangreiche mathematische Theorie, die weit über das hinausgeht, was man in einem Mathematikstudium mit anschließendem Promotionsstudium lernen kann.) Und die Berechnung der Lösungen von allgemeinen (nichtlinearen) Gleichungssystemen ist meist nur näherungsweise möglich mit Verfahren der numerischen Mathematik, die oft auf einer Approximation mit einem linearen Gleichungssystem und auf den effektiven Methoden zur Lösung linearer Gleichungssysteme beruhen.

Bevor wir uns der allgemeinen Theorie linearer Gleichungssysteme zuwenden, betrachten wir, um einen ersten Eindruck davon zu bekommen, was man erwarten kann, einige

BEISPIELE (*lineare Gleichungssysteme mit kleinem m oder n*):

1) $m = 1$, $n = 1$: Hier haben wir es mit *einer* linearen Gleichung für *eine* reelle Unbekannte x zu tun,

$$ax = b\,.$$

Die einzige Lösung ist $x = \frac{b}{a}$ wenn der Koeffizient $a \neq 0$ ist. Das ist der "Normalfall". Wenn wir aber ganz genau sind, so müssen wir auch noch den (zugegebenermaßen nicht sehr sinnvollen) "Ausnahmefall" $a = 0$ betrachten: Dann sind entweder alle $x \in \mathbb{R}$ Lösungen, nämlich wenn auch die rechte Seite $b = 0$ ist, oder es gibt gar keine Lösung, nämlich wenn $b \neq 0$. Mehr gibt es hier nicht zu sagen.

2) $m > 1$, $n = 1$: Hier handelt es sich um *mehrere* lineare Gleichungen für *eine* reelle Unbekannte x,

$$\begin{aligned} a_1 x &= b_1 \\ &\vdots \\ a_m x &= b_m\,. \end{aligned}$$

Das ist natürlich keine sehr sinnvolle Aufgabenstellung: Die erste Gleichung legt ja die Unbekannte x schon fest (wenn $a_1 \neq 0$ ist), und wir können nicht erwarten, dass die Lösung $x = b_1/a_1$ der ersten Gleichung auch noch eine der anderen Gleichungen $a_i x = b_i$ löst. Genauer gesagt ist letzteres genau dann der Fall, wenn $b_i = (a_i/a_1)b_1$ ist, d.h. wenn man die i-te Gleichung aus der ersten erhält, indem man jede Seite mit dem Faktor a_i/a_1 multipliziert. "Normalerweise" wird das nicht der Fall sein; wenn man z.B. die Koeffizienten a_i und / oder die rechten Seiten b_i zufällig wählt, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür gleich Null. Im "Normalfall", d.h. wenn nicht alle Gleichungen Vielfache einunddderselben Gleichung sind, gibt es also für dieses Gleichungssystem keine Lösung.

Der "Ausnahmefall" liegt vor, wenn alle m Gleichungen Vielfache derselben Gleichung sind. Ist mindestens ein Koeffizient a_i nicht Null, so kann man, nötigenfalls nach Vertauschung der ersten mit der i-ten Gleichung, $a_1 \neq 0$ annehmen. Dann ist $x = b_1/a_1$ die eindeutige Lösung des Gleichungssystems. Sind aber alle a_i gleich Null, so gibt es entweder keine Lösung, nämlich wenn nicht alle b_i Null sind, oder alle $x \in \mathbb{R}$ sind Lösungen, nämlich wenn auch alle b_i Null sind.

3) $m = 1$, $n > 1$: Dies ist der Fall *einer* linearen Gleichung für *mehrere* Unbekannte,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\,.$$

Die Lösung ist einfach: Ist ein Koeffizient $a_j \neq 0$ — das ist hier der "Normalfall" —, so kann man die Unbekannten x_k mit Nummern $k \neq j$ beliebig als reelle Zahlen r_k (sog. *Parameter*) vorgeben und dann x_j eindeutig aus der Gleichung bestimmen, so dass

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1\,, \quad \ldots \quad , x_{j-1} = r_{j-1}\,, \\ x_j &= \frac{1}{a_j}(b - a_1r_1 - \ldots - a_{j-1}r_{j-1} - a_{j+1}r_j - \ldots - a_nr_{n-1})\,, \\ x_{j+1} &= r_j\,, \quad \ldots \quad , x_n = r_{n-1} \end{aligned}$$

ein Lösungs-n-tupel ist. Im "Normalfall" gibt es also eine unendliche Schar von Lösungen, nämlich für jede Wahl der Parameter $r_1, \ldots, r_{n-1}$ genau eine.

Da man $n-1$ Parameter in der Lösung frei wählen kann, ist die Lösungsmenge in einem gewissen Sinne $(n-1)$-dimensional (ein $(n-1)$-*dimensionaler affiner Unterraum* von $\mathbb{R}^n$ in der Fachsprache, d.h. eine Gerade für $n-1=1$, eine Ebene für $n-1=2$ usw.).

Im "Ausnahmefall", in dem alle Koeffizienten a_j Null sind, gibt es entweder gar keine Lösung, nämlich wenn die rechte Seite $b \neq 0$ ist, oder alle n-tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sind Lösungen, nämlich wenn $b = 0$ ist.

4) $m = 2$, $n = 2$: Dies ist der einfachste Fall eines "echten" linearen Gleichungssystems, nämlich eines Systems von *zwei* Gleichungen für *zwei* Unbekannte. Nennen wir die Unbekannten x, y, die Koeffizienten a, b, c, d und die rechten Seiten r, s, so lautet es

$$(1) \qquad \begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s\,. \end{cases}$$

Um eine Unbekannte zu eliminieren, multiplizieren wir die obere Gleichung von (1) mit d (d.h. beide Seiten werden mit d multipliziert) und die untere Gleichung mit b:

$$\Longrightarrow \qquad (2) \qquad \begin{cases} dax + dby = dr \\ bcx + bdy = bs\,, \end{cases}$$

und wenn wir hier die untere von der oberen Gleichung subtrahieren (d.h. die linke untere von der linken oberen Seite und die rechte untere von der rechten oberen Seite), so ergibt sich folgende lineare Gleichung, in der nur noch die Unbekannte x vorkommt:

$$\Longrightarrow \qquad (3) \qquad (ad - bc)x = dr - bs\,.$$

Wenn nun $ad - bc \neq 0$ ist, so können wir aus der linearen Gleichung (3) die erste Unbekannte eindeutig berechnen zu $x = \frac{dr-bs}{ad-bc}$. Setzen wir diesen Wert für x in die obere oder untere Gleichung des ursprünglichen Systems (1) ein, so ergibt sich (weil $b \neq 0$ oder $d \neq 0$ ist, wenn $ad - bc \neq 0$) eine eindeutig lösbare lineare Gleichung für die zweite Unbekannte mit dem Ergebnis $y = \frac{as-cr}{ad-bc}$.

Die Logik bei dieser Herleitung war folgende: Wenn das System (1) erfüllt ist, so auch das System (2) und die Gleichung (3), also müssen dann x und y die angegebenen Werte haben. Damit ist zwar noch nicht gesagt, dass diese Werte von x und y wirkliche eine Lösung des ursprünglichen Systems (1) liefern, aber durch Einsetzen in die Gleichungen von (1) überzeugt man sich davon, dass dies tatsächlich der Fall ist. Wir haben also folgendes Ergebnis:

Ist die sog. Determinante $ad - bc$ des linearen Gleichungssystems (1) $\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$ *von Null verschieden (das ist der "Normalfall"), so besitzt das Gleichungssystem die*

eindeutige Lösung $\boxed{x = \dfrac{dr - bs}{ad - bc}}$ *und* $\boxed{y = \dfrac{as - cr}{ad - bc}}$.

Die Zahl $ad - bc$ heißt die **Determinante** des Gleichungssystems mit den Koeffizienten a, b, c, d, weil sie bestimmt (determiniert), ob der Fall einer eindeutigen Lösung vorliegt oder nicht. Ist nämlich $ad - bc = 0$, so kann man überlegen, dass das Gleichungssystem entweder gar keine oder unendlich viele Lösungen hat.

Das geht wie folgt: Sind alle vier Koeffizienten a, b, c, d gleich Null, so hat (1) offenbar gar keine Lösung, wenn $r \neq 0$ oder $s \neq 0$ ist, und (1) hat alle Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als Lösung, wenn $r = s = 0$. Ist aber $ad - bc = 0$ und einer der Koeffizienten $\neq 0$, etwa $a \neq 0$, so entsteht die linke Seite der unteren Gleichung aus der der oberen durch Multiplikation mit $\frac{c}{a}$, weil ja $d = \frac{c}{a}b$ ist. Daher gelten beide Gleichungen simultan, genau wenn die erste gilt und wenn auch $s = \frac{c}{a}r$ ist. Das System hat also in diesem Fall entweder gar keine Lösung, nämlich wenn $s \neq \frac{c}{a}r$, oder es ist äquivalent zu einer einzigen linearen Gleichung $ax + by = r$, welche unendlich viele Lösungen $y \in \mathbb{R}$ beliebig, $x = \frac{1}{a}(r - by)$, besitzt. Völlig analog schließt man, wenn $b \neq 0$ oder $c \neq 0$ oder $d \neq 0$ ist, dass dann entweder keine Lösung von (1) existiert, oder dass es unendlich viele Lösungen (x, y) gibt, bei denen man x oder y beliebig als reellen Parameter wählen kann. Wir fassen diese Diskussion zusammen:

Ist aber die Determinante $ad - bc$ des linearen Gleichungssystems (1) $\left\{\begin{array}{l} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{array}\right.$ *gleich Null (das ist der "Ausnahmefall"), so besitzt das Gleichungssystem entweder:*

- **keine Lösung**, *wenn nämlich mindestens ein Koeffizient $\neq 0$ ist, aber keine der beiden Gleichungen Vielfaches der anderen ist, oder wenn alle Koeffizienten $= 0$ sind, aber nicht beide rechten Seiten r, s; oder:*
- *eine* **einparametrige Lösungsmenge**, *wenn nämlich mindestens ein Koeffizient $\neq 0$ ist und eine der beiden Gleichungen Vielfaches der anderen (man kann dann in der Lösung (x, y) den Wert von x oder von y beliebig vorgeben und die jeweils andere Unbekannte eindeutig berechnen); oder:*
- **alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als Lösungen**, *wenn nämlich alle Koeffizienten und auch beide rechte Seiten $= 0$ sind.* ∎

Die Systeme von zwei linearen Gleichungen für zwei Unbekannte haben wir deswegen so ausführlich unter Beachtung aller möglichen auftretenden Fälle besprochen, weil das Ergebnis schon in gewisser Weise typisch für die allgemeine Situation von m linearen Gleichungen für n Unbekannte ist. Ganz allgemein bestehen nämlich, wie wir sehen werden, die *Alternativen*: Es gibt entweder genau eine Lösung, oder gar keine Lösung, oder eine Schar von unendlich vielen Lösungen, wobei einige der Unbekannten als beliebige Parameter wählbar sind und die anderen dann durch die Gleichungen des Systems eindeutig festgelegt sind. Und im Fall $m = n$, also bei ebenso vielen Gleichungen wie Unbekannten, ist die Existenz genau einer Lösung der "Normalfall", der sich, wenn er nicht von vorneherein vorliegt, nach beliebig kleinen zufälligen Änderungen der Koeffizienten einstellt.

Um beliebig große lineare Gleichungssysteme übersichtlich behandeln zu können, ist eine abkürzende Schreibweise nötig, in der nur noch die relevanten Parameter des Gleichungssystems, also die Koeffizienten und die rechten Seiten, notiert werden. Da die Koeffizienten als Zahlenschema in rechteckiger Anordnung erscheinen, wie es auch sonst in der Mathematik und in der Ökonomie in vielfältigen Zusammenhängen auftritt, hat man für solche rechteckig angeordneten Zahlensysteme eine eigene Begriffsbildung eingeführt; man nennt sie "Matrizen". Die einschlägige Terminologie hierzu beschreiben wir als Nächstes:

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

(K. Steffen, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, WS 2006/07)

DEFINITIONEN und TERMINOLOGIE (*Matrizen*):

1) Eine **Matrix A vom Format (m, n)**, kurz auch **$m \times n$-Matrix** genannt (lies: "m-Kreuz-n-Matrix"), ist ein System von Zahlen (oder Elementen einer Grundmenge) a_{ij}, genannt die **Einträge** der Matrix, die nummeriert sind durch Paare von Zahlen $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Es wird als Zahlenschema in rechteckiger Anordnung wie folgt notiert:

$$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & a_{ij} & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad \uparrow j\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Dabei heißt m die **Zeilenzahl** und n die **Spaltenzahl** der Matrix. Sind beide Zahlen gleich, $m = n$, so spricht man von einer **quadratischen Matrix.** Den ersten zur Nummerierung der Einträge verwendeten Index (hier "i") nennt man den **Zeilenindex** und $\{1, \ldots, m\}$ seinen *Laufbereich*, den zweiten (hier "j") nennt man den **Spaltenindex** und $\{1, \ldots, n\}$ seinen Laufbereich. Die Wahl der Buchstabensymbole zur Bezeichnung der Matrixindizes ist dabei irrelevant, und die Laufbereiche werden oft nicht angegeben, wenn sie aus dem Kontext hervorgehen; man schreibt dann also einfach (a_{ij}) für die Matrix (mit Klammern, um sie von einem einzelnen Eintrag a_{ij} zu unterscheiden). Eine Matrix ist bestimmt durch ihr Format (m, n) und durch die Festlegung ihrer Einträge a_{ij} für alle "Positionen" (i, j) zu diesem Format, d.h. für alle Paare von Indizes i und j mit $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$.

- *Zwei Matrizen sind gleich, genau wenn sie dasselbe Format haben und wenn ihre Einträge für alle Positionen zu diesem Format übereinstimmen.*

Das heißt also $(a_{ij})_{1 \le i \le m,\, 1 \le j \le n} = (b_{kl})_{1 \le k \le p,\, 1 \le l \le q}$, genau wenn $m = p$, $n = q$ und $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Die **Menge aller $m \times n$-Matrizen** mit reellen Einträgen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$. Die $m \times n$-Matrix mit lauter Nulleinträgen heißt **$m \times n$-Nullmatrix** 0.

2) Eine einzeilige Matrix ($m = 1$) bzw. eine einspaltige Matrix ($n = 1$) bezeichnet man auch als

Zeilenvektor $(a_1 \ a_2 \ \ldots \ a_n)$ bzw. **Spaltenvektor** $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

und, um das Format mit anzugeben, genauer als n-gliedrigen Zeilenvektor bzw. Spaltenvektor mit m Einträgen / Komponenten oder ähnlich. Dabei wird in der Notation jeweils ein Matrixindex unterdrückt (der sowieso nur den Wert 1 annehmen kann). Sind alle Einträge Null, so sprechen wir vom **Nullvektor** 0.

Wir treffen folgende Vereinbarung:

- *Spaltenvektoren* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ *werden identifiziert mit m-tupeln* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Das ist nicht nur aus typographischen Gründen zweckmäßig, weil wir dann eine "horizontale" Notation für Spaltenvektoren haben, sondern es hat auch mathematische Gründe. m-tupel sind per Definition m-gliedrige Folgen, deren Glieder mit den Zahlen von 1 bis m nummeriert (gedacht) sind, und diese Begriffsbildung hängt nicht davon ab, welche Notation man dafür verwendet: Zeilen ohne Abtrennung der m Glieder mit Kommas, Zeilen mit Abtrennung der Glieder durch Kommas (unsere Standard-Notation für m-tupel), oder Spalten mit Anordnung der Glieder übereinander. Im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen zeigt es sich aber, dass es natürlicher ist, das m-tupel $(b_1, \ldots, b_m)$ der rechten Seiten als m-gliedrige Spalte zu schreiben (die rechten Seiten erscheinen in dem Gleichungssystem sowieso übereinander angeordnet) und ebenso die Lösungen $x = (x_1, \ldots, x_n)$ als n-gliedrige Spalten. Dagegen erscheinen die Koeffizienten in einer linearen Gleichung für n Unbekannte von vorneherein als n-gliedrige Zeile, und es ist nicht sinnvoll, diese mit der entsprechenden Spalte zu identifizieren, weil das darauf hinausliefe, die Rolle der Koeffizienten und der Unbekannten in einer linearen Gleichung zu vertauschen. Wir unterscheiden also Zeilenvektoren $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$ von den entsprechenden "Spaltenvektoren" $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, deren Einträge wir durch Kommas abtrennen. (In der mathematischen Fachsprache bilden die n-gliedrigen Spaltenvektoren den n-dimensionalen Zahlenraum $\mathbb{R}^n$, die n-gliedrigen Zeilenvektoren aber den sog. *Dualraum* $\mathbb{R}^{n*}$ dazu.)

Eine andere Möglichkeit der Unterscheidung von Zeilen- und Spaltenvektoren in der Notation ist das Symbol a^T für den Zeilenvektor, der dieselben Einträge hat wie ein Spaltenvektor a, d.h. $a^\mathsf{T} = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_m)$ ist ein Code dafür, dass a der Spaltenvektor mit den Einträgen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ist. Das Superskript T steht für Transposition; allgemein bezeichnet man für eine Matrix A vom Format (m, n) mit A^T die sog. **transponierte Matrix** zu A, das ist die Matrix vom Format (n, m), deren Spalten die Zeilen von A sind und deren Zeilen folglich auch die Spalten von A sind. Anschaulich gesprochen erhält man A^T durch Spiegelung der Matrix A an der Diagonalen, die von der ersten Position links oben im Winkel von 45 Grad nach rechts unten führt.

3) Im Zusammenhang mit einem linearen Gleichungssystem von m Gleichungen für n Unbekannte

$$\text{(LGS)} \qquad \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 &+& a_{12}x_2 &+\ldots+& a_{1n}x_n &=& b_1 \\ a_{21}x_1 &+& a_{22}x_2 &+\ldots+& a_{2n}x_n &=& b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 &+& a_{m2}x_2 &+\ldots+& a_{mn}x_n &=& b_m \end{array}$$

nennt man die $m \times n$–Matrix mit den Koeffizienten als Einträgen die

$$\textbf{Koeffizientenmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und den aus den rechten Seiten gebildeten Spaltenvektor die

$$\textbf{Inhomogenität} \text{ oder } \textbf{rechte Seite} \qquad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

des Gleichungssystems. Für das gesamte lineare Gleichungssystem (LGS) schreiben wir dann einfach symbolisch

$$Ax = b\,,$$

was später (nach Einführung der Multiplikation von Matrizen) noch seine Rechtfertigung erhält, hier aber einfach nur als Abkürzung für (LGS) zu verstehen ist. Fügen wir der Koeffizientenmatrix A als $(n{+}1)$-te Spalte die Inhomogenität b an, so erhalten wir eine Matrix $(A|b)$ vom Format $(m, n{+}1)$, die alle Parameter enthält, welche das lineare Gleichungssystem bestimmen, die sogenannte

$$\textbf{erweiterte Koeffizientenmatrix} \qquad (A|b) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

des linearen Gleichungssystems (LGS). Der vertikale Strich vor der letzten Spalte hebt hervor, dass diese Spalte (die rechte Seite) eine andere Funktion hat als die anderen Spalten (Koeffizientenspalten), kann aber auch weggelassen werden. Eine andere Form, in der die erweiterte Koeffizientenmatrix oft notiert wird, ist das sog.

$$\textbf{Tableau} \qquad \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & & x_n & \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array}$$

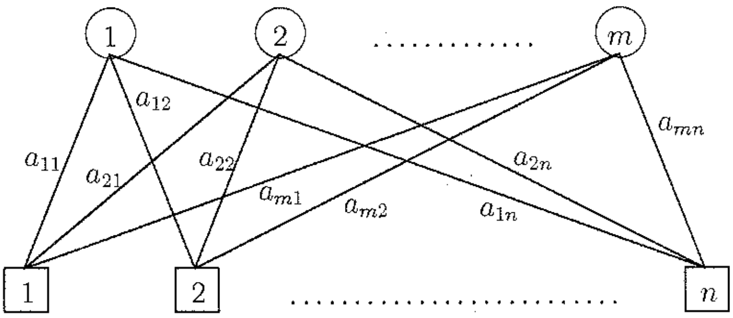
des Gleichungssystems. Dabei sind die Buchstabensymbole für die Unbekannten über die entsprechenden Spalten der Koeffizientenmatrix geschrieben. Das ist nicht nötig, wenn die Unbekannten ebenso nummeriert sind wie die Spalten, aber es ist zweckmäßig, wenn die Unbekannten $x, y, \dots, z$ nicht nummeriert sind, und unbedingt notwendig, wenn die Nummerierung oder Reihenfolge der Unbekannten geändert wird. Die über den Koeffizientenspalten stehende Symbole der Unbekannten zeigen dann an, mit welchen Koeffizienten die jeweiligen Unbekannten in den linearen Gleichungen zu multiplizieren sind. Mathematisch gesehen ist das Tableau eines linearen Gleichungssystems nichts anderes als seine erweiterte Koeffizientenmatrix. Nur die Notation ist verändert, nicht die darin enthaltene Information. Insbesondere sind beim Tableau die manchmal unpraktischen großen "Matrixklammern" weggelassen. ∎

BEISPIELE (*Matrizen in der Ökonomie*):

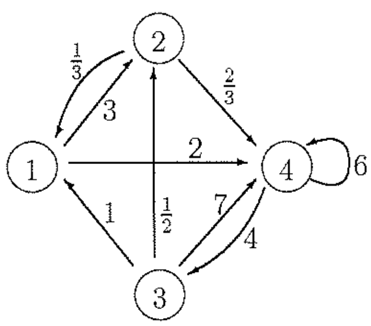
In ökonomischem Kontext treten Matrizen meistens als sog. **Verflechtungsmatrizen** auf, die einen durch Zahlenangaben quantifizierten Zusammenhang zwischen zwei Arten (oder auch derselben Art) von ökonomischen Größen darstellen. Die Größen der ersten Art entsprechen dabei z.B. den Zeilen, die der zweiten Art den Spalten der Matrix, und der Eintrag a_{ij} in Position (i,j) (i-te Zeile und j-te Spalte) gibt die quantitative Beziehung zwischen der i-ten Größe erster Art und der j-ten Größe zweiter Art an. Wenn wir die m Größen erster Art durch (1),(2),…,(m) symbolisieren und die n Größen zweiter Art durch $\boxed{1}, \boxed{2}, \dots, \boxed{n}$, so können wir die Zusammenhänge tabellarisch so darstellen:

$$\begin{array}{c|cccc} & \boxed{1} & \boxed{2} & \dots & \boxed{n} \\ \hline (1) & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ (2) & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m) & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}$$

Das ist nichts anderes als die $m \times n$–Matrix mit den Einträgen a_{ij}, wobei lediglich an die Zeilen und Spalten noch Symbole geschrieben sind, die an die ökonomische Bedeutung der Einträge erinnern. Alternativ kann man die Beziehungen durch einen *bewerteten Graphen* darstellen, in dem die Größen als "Knoten" dargestellt und durch "Kanten" von (i) nach $\boxed{j}$ verbunden sind, welche durch die Anschrift der Zahlen a_{ij} "bewertet" werden.



Diese Darstellung wird allerdings recht unübersichtlich, wenn man viele Knoten hat. Daher lässt man Verbindungskanten mit der Zahl 0 als Bewertung weg. Handelt es sich um Beziehungen zwischen Größen derselben Art (1), (2),…,(m), so kann man diese auch durch einen **bewerteten und gerichteten Graphen** (in der Ökonomie auch "*Gozintograph*" genannt) darstellen, in dem die Knoten die Größen (i) sind und ein Pfeil von (i) nach (j) mit einer angeschrieben Zahl (das ist die "Bewertung") dem Eintrag dieser Zahl in die Zeile i und Spalte j der Verflechtungsmatrix entspricht. Pfeile mit der Zahl 0 als Bewertung werden dabei wieder weggelassen; Pfeile, die von einem Knoten zu demselben Knoten zurückführen entsprechen den Einträgen auf der Diagonalen der Matrix (gleiche Zeilen- und Spaltennummer). Die Abbildung rechts, die einen bewerteten und gerichteten Graphen mit 4 Knoten und die zugehörige Verflechtungsmatrix zeigt, sollte klar machen, wie die Information in dem Graphen kodiert ist.



$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Einige konkrete ökonomische Situationen, in denen die interessierenden Zusammenhänge durch Verflechtungsmatrizen beschrieben werden können, sind folgende:

1) **Transportmatrix:**

$$\begin{array}{c|cccc} & \boxed{1} & \boxed{2} & \dots & \boxed{n} \\ \hline 1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \quad \leftarrow \text{Ankunftsorte}$$

Absendeorte

Der Eintrag a_{ij} gibt hier die Kosten für den Versand einer Mengeneinheit vom Absendeort i zum Ankunftsort $\boxed{j}$ an.

2) **Produktionsmatrix:**

$$\begin{array}{c|cccc} & \boxed{1} & \boxed{2} & \dots & \boxed{n} \\ \hline 1 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 2 & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{array} \quad \leftarrow \text{Endprodukte bzw. Zwischenprodukte}$$

Rohstoffe bzw.
Vorprodukte

Hier gibt der Eintrag r_{ij} den Verbrauch von Mengeneinheiten des Rohstoffs i für die Herstellung einer Einheit des Produkts $\boxed{j}$ an (*Rohstoffverbrauchskoeffizient*) bzw. den Verbrauch von Mengeneinheiten des Vorprodukts i für die Herstellung einer Einheit des Endprodukts $\boxed{j}$ (*Produktionskoeffizient*).

3) **Produktionskostenmatrix:**

$$\begin{array}{c|cccc} & \boxed{1} & \boxed{2} & \dots & \boxed{n} \\ \hline 1 & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ 2 & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{array} \quad \leftarrow \text{Produktionsanlagen}$$

Produkte

Diese Matrix ist von Interesse, wenn man Produkte auf verschiedenen Produktionsanlagen mit unterschiedlichen Kosten fertigen kann. Der Eintrag k_{ij} gibt dann die Kosten (in Geldeinheiten) für die Produktion einer Mengeneinheit des Produkts i auf der Produktionsanlage $\boxed{j}$ an.

4) **Innerbetriebliche Leistungsverrechnung:** Hier stehen die einzelnen Kostenstellen des Betriebs an den Zeilen und an den Spalten der Matrix, die Matrix ist also quadratisch.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & \dots & n \\
\hline
1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{array}
\quad \leftarrow \text{ abgebende Kostenstelle}
$$

empfangende Kostenstelle $\uparrow$

Der Eintrag a_{ij} gibt hier die bei der Kostenstelle i empfangene Leistung der Kostenstelle j an (in Leistungseinheiten). Die Diagonaleinträge a_{ii} beschreiben also die von der Kostenstelle i erbrachte und dort selbst verbrauchte Eigenleistung. Zum innerbetrieblichen Kostenausgleich muss man die erbrachten Leistungen mit Verrechnungspreisen bewerten — dazu später mehr.

5) **Volkswirtschaftliche Verflechtungsmatrix:**

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & \dots & n \\
\hline
1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{array}
\quad \leftarrow \text{ Industriezweige (eines Wirtschaftssektors)}
$$

Industriezweige (eines Wirtschaftssektors) $\uparrow$

Der Eintrag a_{ij} in dieser quadratischen Matrix beschreibt den Verbrauch von Output-Einheiten des i-ten Industriezweigs durch den j-ten Industriezweig.

6) **Marktforschung, Übergangsmatrix:**

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & \dots & n \\
\hline
1 & p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\
2 & p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
n & p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}
\end{array}
\quad \leftarrow \text{ konkurrierende Produkte (z.B. Waschmittel)}
$$

konkurrierende Produkte $\uparrow$

Hier ist p_{ij} der Anteil der Kunden des i-ten Produkts, die im Beobachtungszeitraum zum Produkt j gewechselt sind ($i \neq j$) bzw. die dem Produkt i treu geblieben sind ($i = j$).

Die Einträge in der i-ten Zeile geben also die vollständige Aufteilung des Kundenkreises von Produkt i zu Beginn des Beobachtungszeitraums auf die konkurrierenden Produkte am Ende dieses Zeitraums an. Dabei werden die Anteile in 100 % der jeweiligen Kundenzahl angegeben. Insbesondere sind also alle Einträge Zahlen im Intervall $[0, 1]$, und die Einträge einer jeden Zeile addieren sich zu 1. Man sagt, dass die **Zeilensummen** $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ alle den Wert 1 haben (für $i = 1 \dots n$), und nennt Matrizen mit dieser Eigenschaft **stochastische Matrizen**, weil die Einträge p_{ij} einer jeden Zeile als Wahrscheinlichkeiten interpretiert werden können (hier die Wahrscheinlichkeiten für einen Wechsel vom i-ten zum j-ten Produkt bzw. im Fall $i = j$ für das Verbleiben beim i-ten Produkt), die sich zur Gesamtwahrscheinlichkeit 1 addieren. Haben auch alle **Spaltensummen** $\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$ den Wert 1 (für $j = 1 \dots n$), so liegt eine sog. **doppelt-stochastische Matrix** vor; das ist aber in der hier beschriebenen Situation im Allgemeinen nicht der Fall.

7) **Häufigkeitsmatrix, Wahrscheinlichkeitstheorie:** Beobachtet werden bei einem Produkttyp zwei Merkmale $\mathcal{A}$ (z.B. Preis) und $\mathcal{B}$ (z.B. Qualität), die in unterschiedlichen Ausprägungen / Abstufungen $1, \dots, m$ bei $\mathcal{A}$ und $\boxed{1}, \dots, \boxed{n}$ bei $\mathcal{B}$ auftreten. Dann interessiert die Häufigkeit p_{ij} (in 100 %), mit der das Merkmal $\mathcal{A}$ in der Ausprägung i simultan mit dem Merkmal $\mathcal{B}$ in der Ausprägung $\boxed{j}$ auftritt. Man kann auch sagen, dass $p_{ij} \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieser Konstellation angibt. Die p_{ij} sind die Einträge der $m \times n$–Matrix

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \boxed{1} & \boxed{2} & \dots & \boxed{n} \\
\hline
1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\
2 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
m & p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn}
\end{array}
\quad \leftarrow \text{Ausprägungen von Merkmal } \mathcal{B}$$

Ausprägungen von Merkmal $\mathcal{A}$

Hier ist offenbar die Summe aller Matrixeinträge

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 ;$$

denn diese Summe ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Produkt mit irgendeiner Ausprägung des Merkmals $\mathcal{A}$ und mit irgendeiner Ausprägung des Merkmals $\mathcal{B}$ auftritt. (Natürlich ist dabei vorausgesetzt, dass jedes betrachtete Produkt die Merkmale $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ in einer der erfassten Ausprägungen aufweist.) ■

Diese Beispiele für das Auftreten von Matrizen bei der Beschreibung von Abhängigkeiten zwischen ökonomischen Größen ließen sich noch weiter fortsetzen. Es handelt sich dabei im Grunde immer nur um die Darstellung eines komplexen ökonomischen Beziehungsgeflechts durch eine übersichtliche Tabelle, also ein rechteckiges Zahlenschema. Natürlich hilft das noch nicht viel bei der Lösung von Problemen, die sich im ökonomischen Kontext stellen. Es kommt vielmehr darauf an, einen Kalkül, also ein Rechenverfahren, für Matrizen zu entwickeln, mit dem man dann die ökonomisch relevanten Probleme auch lösen kann. In vielen Fällen lassen sich diese Problemstellungen als lineare Gleichungssysteme formulieren, und solche Gleichungssysteme lassen sich mit einfachen Matrixoperationen tatsächlich lösen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.