3.2 Zeilenoperationen und Zeilen–Stufen–Form

Wir beschreiben nun, wie man mit einfachen Operationen mit Matrizen, den sog. Zeilenoperationen, lineare Gleichungssysteme in eine besonders einfache Gestalt äquivalent umformen und daran die Lösung(en) unmittelbar ablesen kann.

DEFINITION: (Zulässige) Zeilenoperationen mit einer gegebenen Matrix (oder einem Tableau) sind folgende Manipulationen, die eine andere (evtl. auch dieselbe) Matrix vom gleichen Format erzeugen:

(i) **Vertauschung zweier Zeilen**, was wir symbolisch mit $(i) \leftrightarrow (h)$ notieren, wenn die i-te mit der h-ten Zeile vertauscht wird;

(ii) **Multiplikation einer Zeile mit einem Faktor** $r \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, d.h. jeder Eintrag der Zeile wird mit dem Faktor $r \neq 0$ multipliziert; dafür schreiben wir symbolisch $(i) \to r \cdot (i)$, wenn es sich um die i-te Zeile handelt;

(iii) **Addition einer Zeile zu einer anderen**, d.h. jeder Eintrag einer Zeile mit Nummer h wird ersetzt durch die Summe dieses Eintrags und des Eintrags an derselben Position in einer Zeile mit anderer gegebener Nummer i; für diese Operation schreiben wir symbolisch $(h) \to (h) + (i)$.

Eine Operation vom Typ (iii) wird (von geübten Rechnern) oft zusammengefasst mit einer vorangegangenen Operation vom Typ (ii) zu einer

(iv) **kombinierten Zeilenoperation**, d.h. man addiert das r-fache einer Zeile zu einer andern, was wir symbolisch $(h) \to (h) + r \cdot (i)$ notieren, wenn das r-fache der i-ten zur h-ten Zeile addiert wird.

Ist $(a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ die betrachtete Matrix, so wird bei der kombinierten Operation also jeder Eintrag a_{hj} der h-ten Zeile ersetzt durch $a_{hj} + ra_{ij}$ für $j = 1 \dots n$. Hier darf der Faktor r auch Null sein; denn das ändert an der Matrix ja gar nichts. ■

Ist nun $(A|b)$ die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems und führt man damit eine zulässige Zeilenoperation aus, so ist jede Lösung des ursprünglichen Gleichungssystems auch eine Lösung des umgeformten Gleichungssystems, das als erweiterte Koeffizientenmatrix die neue Matrix hat, die sich aus $(A|b)$ durch die Zeilenoperation ergab. So sind eben die Zeilenoperationen gerade eingerichtet. Nun kann man aber offenbar jede Zeilenoperation durch eine zulässige Zeilenoperation wieder rückgängig machen. Deshalb ist auch jede Lösung des neuen linearen Gleichungssystems eine Lösung des alten; mit anderen Worten: Beide Systeme haben dieselbe Lösungsmenge. Es gilt also der folgende Satz, der der Schlüssel zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist:

SATZ: *Zulässige Zeilenoperationen bei der erweiterten Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems führen stets auf die erweiterte Koeffizientenmatrix eines äquivalenten linearen Gleichungssystems, d.h. beide Systeme haben dieselbe Lösungsmenge.* ■

DISKUSSION: 1) Man kann die Zeilenoperationen direkt am Gleichungssystem, an der Matrix oder am Tableau vornehmen, das läuft alles auf dasselbe hinaus. Wichtig ist, dass man in jedem Fall die *erweiterte* Koeffizientenmatrix nimmt, d.h. die *Zeilenoperationen müssen auch mit den rechten Seiten des Gleichungssystems vorgenommen werden*!

2) Spaltenoperationen sind keine Äquivalenzumformungen, d.h. wenn man Spaltenoperationen an der Koeffizientenmatrix ausführt, die natürlich ganz analog erklärt werden, so erhält man im Allgemeinen ein neues Gleichungssystem, das nicht dieselbe Lösungsmenge hat. Zwar kann man aus den Lösungen des ursprünglich Systems die des neuen leicht berechnen und auch umgekehrt, aber das neue System ist eben im Allgemeinen nicht äquivalent in dem strikten Sinne, dass es dieselbe Lösungsmenge besitzt wie das alte. Also Hände weg von Spaltenoperationen! Ganz abwegig wäre es, etwa eine Spalte der Koeffizientenmatrix mit der Spalte der rechten Seiten zu vertauschen; denn die Koeffizienten haben eine andere Funktion in dem Gleichungssystem als die rechten Seiten.

Eine Ausnahme von der Regel sind Spaltenvertauschungen bei der Koeffizientenmatrix:

- *Spaltenvertauschungen bei der Koeffizientenmatrix sind zulässig, wenn man die Zuordnung der Unbekannten zu den Spalten beibehält, die Unbekannten also entsprechend mitvertauscht.*

Das läuft nämlich nur auf eine andere Reihenfolge der Summanden in jeder einzelnen linearen Gleichung des Systems hinaus, bzw. auf eine Umnummerierung der Unbekannten; es ändert also überhaupt nichts an den Gleichungen. Statt

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & & x_n & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array} \quad \text{kann man also genau so gut schreiben} \quad \begin{array}{ccccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & & x_n & \\ \hline a_{12} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m2} & a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \hline \end{array} \;;$$

denn beide Tableaus stellen dasselbe lineare Gleichungssystem dar. Ist dann zum Beispiel $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ Lösungs-n-tupel zum zweiten Tableau, so zeigt die Notation der Unbekannten über den Spalten, dass $x_1 = r_2$, $x_2 = r_1$, $x_3 = r_3, \dots, x_n = r_n$ das Gleichungssystem zum ersten Tableau löst. (Beide Systeme haben also nicht dieselben Lösungs-n-tupel, sondern die des zweiten gehen aus denen des ersten durch die Komponentenvertauschung hervor, die der vorgenommenen Spaltenvertauschung entspricht.)

3) Das **Ziel der Ausführung von Zeilenoperationen** an einem gegebenen linearen Gleichungssystem ist, dieses in ein äquivalentes von so einfacher Form umzuformen, dass man dessen Lösungsmenge direkt ablesen kann. Weil Zeilenoperationen Äquivalenzumformungen sind, ist diese dann auch die Lösungsmenge des ursprünglichen Gleichungssystems. Das Ziel lässt sich, wie wir sehen werden, immer erreichen. ■

Bevor wir das im allgemeinen Fall diskutieren, betrachten wir erst ein

BEISPIEL:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 2 \\ -x & + & 4y & & & = & 6 \end{array}$$

Wir schreiben die erweiterte Koeffizientenmatrix dieses Systems auf und formen sie durch Zeilenoperationen um mit dem Ziel, Nulleinträge unter der Diagonalen zu erreichen:

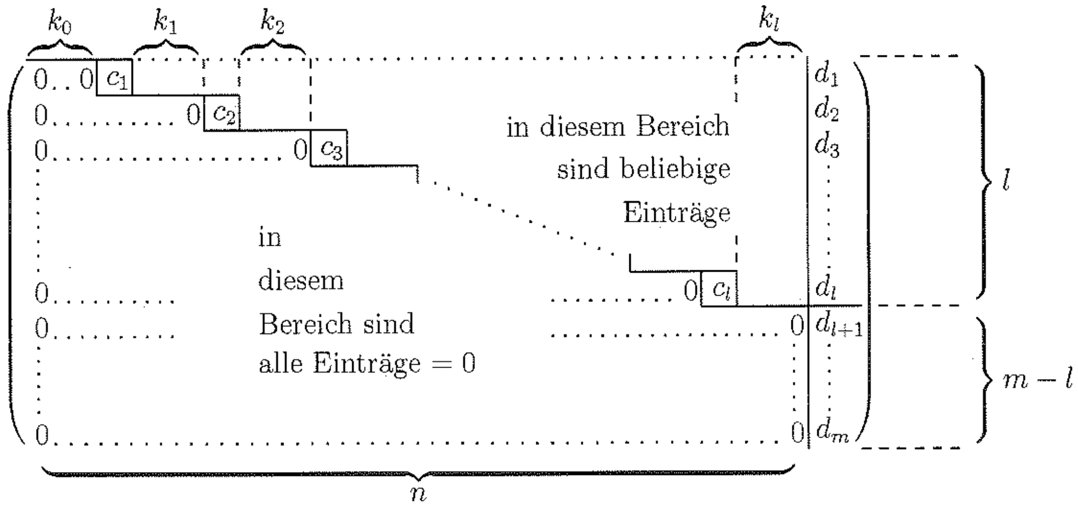
$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \textcircled{2} \to \overset{\Longleftrightarrow}{\textcircled{2}} + \textcircled{1} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 & 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\textcircled{3} \to \overset{\Longleftrightarrow}{\textcircled{3}} + \textcircled{1} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \textcircled{3} \to \overset{\Longleftrightarrow}{\textcircled{3}} - 3 \cdot \textcircled{2} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Im letzten Tableau hat die Koeffizientenmatrix sog. obere **Dreiecksform**, und das bedeutet, dass man die Lösungen des zugehörigen linearen Gleichungssystems von unten nach oben fortschreitend ablesen kann: Die unterste Gleichung lautet nun $-3z = 0$, also ist $z = 0$, die mittlere Gleichung ist $2y + z = 2$, also $y = \frac{1}{2}(2 - z) = 1$, und die erste Gleichung $x + 2y = 0$ gibt schließlich noch $x = -2y = -2$. Somit besitzt das letzte — und das ursprüngliche — Gleichungssystem die eindeutige Lösung $x = -2$, $y = 1$, $z = 0$. Statt der letzten Zeilenoperation hätten wir auch die zweite und dritte Spalte im Tableau vertauschen und direkt ablesen können $y = 1$, $z = 2 - 2y = 0$, $x = -2y = -2$. ■

Es zeigt sich, dass die Methode aus dem letzten Beispiel *immer* zum Ziel führt: Mit Zeilenoperationen lässt sich eine Art Dreiecksgestalt der Koeffizientenmatrix erreichen.

SATZ (über die Zeilen-Stufen-Form):
(i) *Durch zulässige Zeilenoperationen kann die erweiterte Koeffizientenmatrix* $(A|b)$ *eines linearen Gleichungssystems stets auf eine Form gebracht werden, bei der (von links) der erste von Null verschiedene Eintrag in jeder Koeffizientenzeile später kommt als in der darüber liegenden Zeile. Diese sogenannte* **Zeilen-Stufen-Form** *hat also die Gestalt*



mit Zahlen $0 \leq l \leq \min(m, n)$ *und* $k_0, k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}_0$, *so dass* $l + k_0 + \ldots + k_l = n$ *ist, und mit von Null verschiedenen Einträgen* $c_1, c_2, \ldots, c_l$ *in der vordersten Position jeder Stufe. (Rechts von den* c_i *können in jeder Zeile beliebige Einträge stehen; auch die Einträge* d_i *in der Spalte der rechten Seiten sind beliebig.) Dabei hängen die Zahlen* l *(die Anzahl der Stufen) und* $k_0, k_1, \ldots, k_l$ *(die Breite der einzelnen Stufen) nur von der ursprünglichen Koeffizienten-*$m \times n$*-Matrix* A *ab und nicht von der Art und Reihenfolge der Zeilenoperationen, mit denen die Zeilen-Stufen-Form hergestellt wurde. (Die Einträge in der Zeilen-Stufen-Form hängen dagegen von den gewählten Zeilenoperationen ab.)*

(ii) *Aus der Zeilen-Stufen-Form des linearen Gleichungssystems erhält man die Lösungen folgendermaßen: Für die sog.* **Nicht-Basisvariablen**, *das sind die Unbekannten, die zu einer Spalte gehören, welche nicht durch einen Stufenbeginn geht (also nicht durch eine der Positionen, auf denen die* c_i *eingetragen sind), kann man beliebige reelle Zahlen als Parameter vorgeben. Dazu lassen sich dann durch Auflösen der Gleichungen Nr.* l *bis Nr. 1 (von unten nach oben) eindeutige Werte der* **Basisvariablen** *berechnen, also der Unbekannten, die zu einer der Positionen der Einträge* $c_i \neq 0$ *gehören, derart dass sich insgesamt ein Lösungs-*n*-tupel ergibt. Im* **Konsistenzfall** $d_{l+1} = 0, \ldots, d_m = 0$ *oder* $l = m$ *erhält man in dieser Weise die allgemeine, von* $n - l$ *Parametern abhängende bzw. im Fall* $l = n$ *eindeutige Lösung des Gleichungssystems. Im* **Inkonsistenzfall** $l < m$ *und* $d_i \neq 0$ *für ein* $i > l$ *hat das Gleichungssystem keine Lösung.* ■

Dieses Ergebnis ist vielleicht nicht so einfach, wie man es sich wünschen würde; aber es gilt eben für *beliebige* lineare Gleichungssysteme und erfasst *alle* Fälle, die beim Lösen linearer Gleichungssysteme überhaupt eintreten können. Da man die Zeilen-Stufen-Form auch rechnerisch leicht herstellen kann (von Hand bei kleinen linearen Gleichungssystemen, mit einem Computer-Programm bei größeren), liefert der Satz zugleich eine effektive *Rechenmethode*, mit der man für beliebige lineare Gleichungssysteme die allgemeine Lösung berechnen bzw. die Nichtexistenz einer Lösung feststellen kann. In diesem Sinne beantwortet der Satz alle Fragen, die wir in 3.1 gestellt haben!

Der *Beweis* des Satzes besteht in folgendem auch praktisch anwendbaren Verfahren, das **Gaußsches Eliminationsverfahren** heißt, weil es zu Gleichungen führt, in denen eine Unbekannte "eliminiert" ist, d.h. nicht mehr auftritt (bzw. den Koeffizienten Null hat). Man wählt in der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

in *Schritt 1* eine Zeile mit Eintrag $\neq 0$ an erster Position aus. (Die ausgewählte Zeile wird auch *Pivot-Zeile* genannt.) Durch Zeilenvertauschung bringt man nun diese Zeile nach oben, so dass danach der (neue) Eintrag $a_{11} \neq 0$ ist. Dann subtrahiert man für $i = 2 \dots n$ das a_{i1}/a_{11}-fache der ersten Zeile von der i-ten Zeile und erhält eine neue erweiterte Koeffizientenmatrix, in der die erste Spalte unter a_{11} nur noch Nulleinträge hat. Hat die erste Spalte von vorneherein nur Nulleinträge, so bestimmt man die Zahl k_0 der Nullspalten, die vor dem erstem Matrixkoeffizienten $\neq 0$ kommen, und führt die Prozedur mit der $(k_0{+}1)$-ten Spalte statt mit der 1-ten durch. (Sind alle Einträge von A Null, so ist man schon fertig.) Das Ergebnis dieses ersten Schrittes des Eliminationsverfahrens ist eine erweiterte Koeffizientenmatrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{cc|c} \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & c_1 & \begin{matrix} * & \dots & * \end{matrix} \;\Big|\; * \\ \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} & & \\ & \widetilde{A} & \\ & & \end{matrix} \;\Big|\; \widetilde{b}} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{0 \ \dots \ 0}_{k_0} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{n-k_0-1}$$

mit $k_0 \in \mathbb{N}_0$, $c_1 \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, einer $(m{-}1) \times (n{-}k_0{-}1)$–Matrix $\widetilde{A}$, einem Spaltenvektor $\widetilde{b} \in \mathbb{R}^{m-1}$ und irgendwelchen Einträgen $*$.

Damit sind die ersten $k_0 + 1$ Unbekannten aus den Gleichungen Nr. 2 bis Nr. m eliminiert. An der ersten Gleichung, also an der obersten Zeile dieser Matrix, wird in den folgenden Schritten nichts mehr geändert.

In *Schritt 2* wiederholt man nun die Prozedur mit der um eine Zeile und $k_0{+}1$ Spalten kleineren Matrix $(\widetilde{A}|\widetilde{b})$. Es ist klar, dass man so in *weiteren Schritten* fortfahrend nach endlich vielen Schritten die Zeilen-Stufen-Form erreicht hat und damit die Lösung(en) des Gleichungssystems wie im Satz angegeben berechnen kann. Die Anzahl l der erforderlichen Schritte ist offenbar nicht größer als die Zahl m der Gleichungen und auch nicht größer als die Zahl n der Unbekannten.

Bleibt noch zu überlegen, dass l und $k_0, k_1, \dots, k_l$ nur von der ursprünglichen Koeffizientenmatrix A abhängen. Wäre das nicht so, so könnte man durch Zeilenoperationen aus dem homogenen Gleichungssystem $Ax = 0$ zwei verschiedene Zeilen-Stufen-Formen dieses Systems herstellen (die dann natürlich auch homogen sind), so dass eine Unbekannte x_j Nicht-Basisvariable bezüglich der ersten Zeilenstufenform ist, aber Basisvariable bezüglich der zweiten. Letzteres bedeutet, dass in jedem Lösungs-n-tupel $x_1, \dots, x_n$

mit $x_{j+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ auch $x_j = 0$ sein muss, ersteres aber, dass man Lösungs-n-tupel mit $x_{j+1} = 0, \ldots, x_n = 0$ finden kann, bei denen x_j einen beliebig gegebenen reellen Wert annimmt. Da es es sich jeweils um dieselbe Lösungsmenge handelt, eben die zu $Ax = 0$, kann nicht beides zugleich richtig sein, d.h. alle Zeilen-Stufen-Formen von A haben dieselben Basis- und Nicht-Basisvariablen und damit auch dieselben Zahlen l und $k_0, k_1, \ldots, k_n$. Zwei verschiedene Rechner können durchaus Matrizen mit unterschiedlichen Einträgen als Zeilen-Stufen-Form zu derselben erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ erhalten; aber die Anzahl der Stufen und die Breite der einzelnen Stufen müssen — wenn korrekt gerechnet wurde — bei beiden dieselben sein!

Die Zahl l der Stufen (also der Koeffizientenzeilen mit mindestens einer von Null verschiedenen Eintragung) in der Zeilen-Stufen-Form beschreibt in gewisser Weise, wieviele der Gleichungen des ursprünglichen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ unabhängig sind. Besteht das System z.B. aus einer einzigen linearen Gleichung, die man m-fach aufgeschrieben hat, so ergibt sich $l = 1$ (sofern nicht alle Koeffizienten Null sind und damit $l = 0$). Und besteht das System aus drei Gleichungen, von denen die dritte die Summe der beiden ersten Gleichungen ist oder daraus durch eine Zeilenoperation hervorgeht, so ist $l = 2$ (sofern nicht schon eine der ersten beiden Gleichungen Vielfaches der anderen ist, in welchem Falle man $l = 1$ erhält oder, wenn alle Koeffizienten Null sind, sogar $l = 0$). Allgemein sind alle linearen Gleichungssysteme, die man mit der Koeffizientenmatrix A aufstellen kann, schon äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem, in dem nur Koeffizientenzeilen aus l geeignet ausgesuchten Zeilen von A auftreten, aber im Allgemeinen nicht zu einem mit weniger als l Zeilen von A. Weil die Zahl l von fundamentaler Bedeutung für die Diskussion des linearen Gleichungssystems ist, führt man einen Namen dafür ein:

DEFINITION: Die Zahl l der Stufen, also der Zeilen mit mindestens einer von Null verschiedenen Eintragung, die sich bei Herstellung der Zeilen-Stufen-Form der Koeffizientenmatrix A eines linearen Gleichungssystems ergibt, heißt die **(maximale) Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen** des Gleichungssystems oder der **Zeilenrang** der Koeffizientenmatrix A. ■

Bevor wir einige konkrete Beispiele zur Herstellung der Zeilen-Stufen-Form und Lösung von linearen Gleichungssystemen durchrechnen, diskutieren wir noch Konsequenzen für die allgemeine Theorie linearer Gleichungssysteme.

DISKUSSION (*Konsequenzen der Zeilen-Stufen-Form für lineare Gleichungssysteme*):

1) Gegeben sei ein System $Ax = b$ von m linearen Gleichungen für n Unbekannte, und die Zahl der linear unabhängigen Gleichungen dabei sei $l \leq \min(m, n)$. Dann besteht folgende dreiteilige Alternative:

- *Entweder liegt ein* **wohlgestelltes Problem** *vor, d.h.* $Ax = b$ *hat genau eine Lösung;*
- *oder ein* **inkonsistentes Problem**, *d.h.* $Ax = b$ *hat keine Lösung;*
- *oder ein* **konsistentes, aber nicht wohlgestelltes Problem**, *und in diesem Fall hat* $Ax = b$ *eine unendliche Schar von Lösungen.*

Das liest man aus dem Satz über die Zeilen-Stufen-Form unmittelbar ab. Die Information, die diese Alternative zunächst einmal beinhaltet, ist, dass der Fall von mehr als einer, aber insgesamt nur endlich vielen Lösungen bei einem linearen Gleichungssystem nicht auftreten kann. Anders als z.B. bei Systemen von quadratischen Gleichungen gibt es also bei linearen Gleichungssystemen nicht den Fall, dass man genau zwei, oder genau drei, oder genau vier ... Lösungen hat! An der Zeilen-Stufen-Form kann man außerdem unmittelbar ablesen, welcher der drei Fälle eintritt.

Der Fall, der für Anwendungen am wichtigsten ist, ist natürlich der erste — wenn es keine Lösung gibt, so kann man mit dem Gleichungssystem in einer Anwendung nichts anfangen (außer der Erkenntnis, dass man eine unmögliche Situation beschrieben hat); wenn es unendlich viele Lösungen gibt, so hat man das Problem, welche von diesen die für die ins Auge gefasste Anwendung die "richtige" oder "beste" ist. Zur Modellierung eines Problems, das aus einem Anwendungsgebiet kommt, taugt also ein lineares Gleichungssystem nur, wenn es wohlgestellt ist, d.h. genau eine Lösung hat. Der Satz über die Zeilen-Stufen-Form sagt uns, dass dies genau dann der Fall ist, wenn erstens $n = l$ ist, wenn man also ebenso viele unabhängige Gleichungen wie Unbekannte hat, und wenn zweitens auch $m = l$ ist oder alle rechten Seiten d_j mit $j > m$ verschwinden. Insbesondere *kann ein wohlgestelltes Problem nur vorliegen, wenn man mindestens so viele lineare Gleichungen wie Unbekannte hat und, genauer gesagt, ebenso viele unabhängige Gleichungen wie Unbekannte.* Die Zeilen-Stufen-Form hat bei einem wohlgestellten Problem die Gestalt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_1 & & & & d_1 \\ & c_2 & * & & d_2 \\ & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & c_n & d_n \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} \text{mit } c_i \in \mathbb{R}_{\neq 0},\ d_i \in \mathbb{R}, \\ \text{beliebigen Einträgen } * \\ \text{und Nulleinträgen } 0 \end{array}$$

eventuell noch mit $(n+1)$-gliedrigen Nullzeilen darunter. Man sagt, dass die Koeffizientenmatrix eine **obere Dreiecksmatrix** mit Diagonaleinträgen $\neq 0$ ist. Die Auflösung eines Gleichungssystems dieser Form von unten nach oben ist offenbar eindeutig möglich.

Der Inkonsistenzfall kann im Prinzip immer eintreten, wenn das lineare Gleichungssystem inhomogen ist, mit Ausnahme des Falls $l = m = n$, bei dem man ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte hat und die Gleichungen alle linear unabhängig sind. In diesem letzteren Fall hat man ja für jede Wahl der rechten Seiten b ein wohlgestelltes Problem. Bei einem homogenen linearen Gleichungssystem kommt der Inkonsistenzfall dagegen nie vor; denn es gibt ja immer die triviale Lösung.

Im dritten Fall gibt uns der Satz über die Zeilen-Stufen-Form eine sehr viel präzisere Information als nur Unendlichkeit der Lösungsmenge. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $l < n$ ist, wenn man also *weniger unabhängige Gleichungen als Unbekannte hat,* und dann sind $n-l$ der Unbekannten (die Nicht-Basisvariablen) beliebig als reelle Parameter wählbar und dazu die restlichen Unbekannten (die Basisvariablen) eindeutig berechenbar, so dass sich jeweils ein Lösungs-n-tupel ergibt. Man sagt, dass die Lösungen eine **spezielle $(n-l)$-parametrige lineare Schar** L bilden; für $n-l = 1, 2, 3, \ldots$ ist die Lösungsmenge L geometrisch gesprochen eine Gerade, eine Ebene, ein 3-dimensionaler Raum ... in $\mathbb{R}^n$.

2) Wenn man fragt, wann ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit Koeffizientenmatrix A vom Format (m, n) für *alle* rechten Seiten b lösbar ist, so lautet die Antwort:

- *Das System $Ax = b$ ist genau dann für jede Vorgabe der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar, wenn $l = m$ ist, wenn also alle Gleichungen des Systems unabhängig sind; das ist nur möglich, wenn $m \leq n$ ist, wenn man also höchstens so viele Gleichungen hat wie Unbekannte.*

Das ist klar, weil man genau im Fall $l < m$ ja rechte Seiten d_i in der Zeilen-Stufen-Form wählen kann, die zu einem inkonsistenten Gleichungssystem führen (nämlich $d_i \neq 0$ für ein $i > l$) und weil man daraus durch Rückrechnen der Zeilentransformationen ein inkonsistentes System $Ax = b$ erhält. Wenn man andererseits fragt, unter welchen Bedingungen an A die Lösung immer eindeutig ist, wenn sie existiert, so lautet die Antwort:

- *Das System $Ax = b$ hat genau dann für jede Vorgabe der rechten Seite $b \in \mathbb{R}^m$ höchstens eine Lösung, wenn $l = n$ ist, wenn es also genau so viele unabhängige Gleichungen wie Unbekannte gibt; das ist nur möglich, wenn $m \geq n$ ist, wenn man also mindestens so viele Gleichungen hat wie Unbekannte.*

Das ist klar, weil es genau im Fall $l < n$ Nicht-Basisvariablen gibt, deren Werte im Lösungs-n-tupel frei wählbar sind. Die Lösungsmenge zu $Ax = b$ ist für jede rechte Seite b dann entweder leer oder eine unendliche $(n-l)$-parametrige Schar.

3) Besonders wichtig ist der **Spezialfall $m = n$**, d.h. *genau so viele Gleichungen wie Unbekannte*. Dann lautet die Alternative so:

- *Sind die Gleichungen linear unabhängig ($l = n = m$), so hat das System $Ax = b$ für jede rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung.*
- *Sind die Gleichungen aber linear abhängig ($l < n = m$), so ist das System nicht für jede rechte Seite b lösbar und die Lösungen bilden, wenn welche existieren, eine spezielle $(n-l)$-parametrige lineare Schar in $\mathbb{R}^n$.*

4) Ein anderer wichtiger Spezialfall ist der **homogene Fall**, d.h. es liegt ein System $Ax = 0$ von m linearen Gleichungen für n Unbekannte vor, bei dem alle rechten Seiten Null sind. Dann hat man stets mindestens die triviale Lösung $x = (0, \ldots, 0)$, also lautet die Alternative aus 1) nun, wenn wieder l die Zahl der unabhängigen Gleichungen bezeichnet:

- Entweder: *Es ist $l = n$, d.h. es gibt ebenso viele unabhängige Gleichungen wie Unbekannte, und dann ist die triviale Lösung die einzige Lösung. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $m \geq n$ ist, wenn man also nicht weniger homogene lineare Gleichungen hat als Unbekannte.*
- Oder: *Es ist $l < n$, d.h. es gibt weniger unabhängige Gleichungen als Unbekannte, und dann bilden die Lösungen eine unendliche $(n-l)$-parametrige lineare Schar. Dieser Fall liegt immer vor, wenn $m < n$ ist, wenn man also insgesamt weniger homogene lineare Gleichungen hat als Unbekannte.*

5) Zwischen homogenen und inhomogenen linearen Gleichungssystemen mit derselben Koeffizientenmatrix A besteht folgender Zusammenhang:

- *Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems erhält man (wenn es überhaupt eine Lösung hat), indem man zu einer speziellen Lösung die allgemeine Lösung des homogenen Systems addiert.*

Das bedeutet Folgendes: Ist $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ irgendein Lösungs-n-tupel zu $Ax = b$ (das ist mit einer "speziellen Lösung" gemeint), so erhält man alle Lösungen dieses Gleichungssystems in der Form $x = x^* + y := (x_1^* + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ (man nennt das die *komponentenweise gebildete Summe* der Spaltenvektoren x^* und y in $\mathbb{R}^n$), wobei y ein Lösungs-n-tupel des homogenen Gleichungssystems $Ay = 0$ ist. Der Beweis ist einfach: $Ax = b \iff Ax = Ax^* \iff a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = a_{i1}x_1^* + \ldots + a_{in}x_n^*$ für $i = 1 \ldots m$ $\iff a_{i1}(x_1 - x_1^*) + \ldots + a_{in}(x_n - x_n^*) = 0$ für $i = 1 \ldots m \iff y := (x_1 - x_1^*, \ldots, x_n - x_n^*)$ löst $Ay = 0 \iff x_j = x_j^* + y_j$ für $j = 1 \ldots n$ und ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Ay = 0$.

6) Allgemein nennen wir eine nichtleere Menge $L \subset \mathbb{R}^n$ von n-tupeln eine **k–parametrige lineare Schar oder Menge in $\mathbb{R}^n$**, wenn es n affin lineare Funktionen $\ell_j(r_1, \dots, r_k)$ gibt, so dass die n-tupel $(\ell_1(r_1, \dots, r_k), \dots, \ell_n(r_1, \dots, r_k))$ alle Elemente der Menge L durchlaufen (und keine anderen), wenn die Parameter $(r_1, \dots, r_k)$ alle reellen k-tupel durchlaufen. Dabei ist die Anzahl k der Parameter durch die Menge L nicht eindeutig bestimmt, weil man sich immer zusätzliche Parameter $r_{k+1}, r_{k+2}, \dots$ denken kann, die in den linearen Funktionen ℓ_j nur mit Nullkoeffizienten auftreten. Ist die Zahl k der Parameter minimal, also dieselbe Menge L nicht auch als $(k-1)$-parametrige lineare Schar darstellbar, so sprechen wir von einer **k–dimensionalen linearen Schar.** Die **Dimension** einer linearen Menge ist also die minimale Zahl k der Parameter, die erforderlich ist, um sie als lineare Schar zu parametrisieren. Die Dimension k liegt z.B. vor, wenn wir eine **spezielle k–parametrige lineare Schar** haben, bei der die Parameter Komponenten der n-tupel in L sind, d.h. es ist $\ell_{j_h}(r_1, \dots, r_k) = r_h$ für gewisse Zahlen $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ in $\{1, \dots, n\}$. Diese Situation haben wir gerade mit $k := n - \ell$ bei der Lösungsmenge eines konsistenten linearen Gleichungssystems für n Unbekannte, wenn die Anzahl l der unabhängigen Gleichungen kleiner als die der Unbekannten ist und man somit $k = n-l$ Nicht-Basisvariable als freie Parameter im Lösungs-n-tupel wählen kann. Mit affin linearen Funktionen $\widetilde{\ell}_j(s_1, \dots)$ von weniger als k Parametern s_i kann man nämlich L nicht beschreiben, weil sonst $\widetilde{\ell}_{j_h}(s_1, \dots) = r_h$, $h = 1 \dots k$, ein für alle Wahlen der rechten Seiten r_h lösbares System von k linearen Gleichungen für weniger als k Unbekannte wäre, was nach 2) unmöglich ist. Wenn wir noch für $k = 0$ vereinbaren, unter einer 0-dimensionalen linearen Schar in $\mathbb{R}^n$ ein Teilmenge zu verstehen, die aus genau einem n-tupel besteht, so können wir also sagen:

- *Die Lösungsmenge L eines konsistenten linearen Gleichungssystems mit l unabhängigen Gleichungen für n Unbekannte ist eine $(n-l)$-dimensionale lineare Menge,*

d.h. L lässt sich als $(n-l)$-parametrige lineare Menge in $\mathbb{R}^n$ beschreiben, aber nicht als lineare Schar mit weniger als $n-l$ Parametern. In der mathematischen Fachterminologie nennt man eine k-dimensionale lineare Teilmenge L von $\mathbb{R}^n$ einen **k–dimensionalen affinen Unterraum** von $\mathbb{R}^n$ und, wenn der Nullvektor $0 = (0, \dots, 0)$ in L liegt, einfach einen **k–dimensionalen (Vektor-)Unterraum** von $\mathbb{R}^n$. Geometrisch gesprochen handelt es sich dabei für $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ um einen Punkt, eine Gerade, eine Ebene, einen 3-dimensionalen Raum, … in $\mathbb{R}^n$, worin im Fall eines Vektorunterraums der Ursprung $0 = (0, \dots, 0)$ von $\mathbb{R}^n$ enthalten ist.

7) Der Satz über die Zeilen-Stufen-Form ermöglicht auch eine genaue Beschreibung der Menge Z der **konsistenten rechten Seiten** zu einer gegebenen Koeffizienten$-m \times n-$Matrix A, d.h. der Menge der $b \in \mathbb{R}^m$, für die eine Lösung x zu $Ax = b$ existiert. Wenn man die Zeilenoperationen, die zu einer Zeilen-Stufen-Form führen, mit einem allgemeinen Spaltenvektor $(b_1, \dots, b_m)$ von rechten Seiten durchführt, so ergeben sich die Einträge $d_{l+1}, \dots, d_m$ der letzten Spalte der Zeilen-Stufen-Form als lineare Funktionen von $b_1, \dots, b_m$ in der Form $d_{l+h} = \sum_{i=1}^m c_{hi} b_i$, wobei die Koeffizienten c_{hi} durch die ausgeführten Zeilen-Operationen bestimmt sind. Die $b \in \mathbb{R}^m$, für die $Ax = b$ lösbar ist, sind dann genau die Lösungen des linearen Gleichungssystems $Cb = 0$ mit der $(m-l) \times m-$Koeffizientenmatrix $C = (c_{hi})$. Da man die Zeilenoperationen wieder rückgängig machen kann, lässt sich das System $Cb = d$ für jede rechte Seite $d \in \mathbb{R}^{m-l}$ lösen, also sind nach 2) die Gleichungen dieses Systems unabhängig. Die Lösungsmenge ist daher eine unendliche l-dimensionale lineare Schar von Spaltenvektoren $b \in \mathbb{R}^m$, bzw. besteht im Fall $l = 0$ (d.h. A ist die Nullmatrix) nur aus der Nullspalte $0 \in \mathbb{R}^m$. Eine konkrete Parametrisierung der konsistenten rechten Seiten b in der Gestalt $b_i = \sum_{k=1}^{l} b_{ik} d_k$ für $i = 1 \dots m$ mit Parametern $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{R}$ erhält man, wenn man mit rechten Spalten der Form $(d_1, \dots, d_l, 0, \dots, 0)$ in der Zeilen-Stufen-Form die ausgeführten Zeilenoperationen zurückrechnet.

- *Die konsistenten rechten Seiten für ein System $Ax = b$ von m linearen Gleichungen bilden eine l-dimensionale lineare Schar Z in $\mathbb{R}^m$, wobei l der Zeilenrang von A ist, also die maximale Zahl der unabhängigen Gleichungen. Eine lineare Parametrisierung von Z mit l Parametern und ein System von $m-l$ unabhängigen homogenen linearen Gleichungen für m Unbekannte, das Z als Lösungsmenge hat, kann mit den Zeilenoperationen, die zur Zeilen-Stufen-Form führen, explizit berechnet werden.*

8) Zusammen mit der Aussage aus 6), dass die Lösungsmenge L zu $Ax = 0$ eine lineare Menge der Dimension $n-l$ ist, ergibt sich ein fundamentaler Satz der Linearen Algebra: Die Dimensionen von L und Z addieren sich stets zu $(n-l)+l = n$. Dies ist der sogenannte

- **Rangsatz:** *Für jede $m \times n$-Matrix A addieren sich die Dimensionen des Lösungsraumes L des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ und des Raumes Z der konsistenten rechten Seiten für $Ax = b$ zur Spaltenzahl n von A.*

Grob gesprochen kann man sagen, dass $Ax = 0$ um so weniger / mehr Lösungen hat, je mehr / weniger zulässige rechte Seiten b existieren. ■

BEISPIELE (*zur Zeilen-Stufen-Form und Lösung linearer Gleichungssysteme*):
Zunächst eine Vorbemerkung darüber,

- *was man zuerst tut,*

wenn ein lineares Gleichungssystem vorgelegt ist: Man zählt zunächst, *wieviele Gleichungen man hat und wieviele Unbekannte* und dann schaut man auf die rechte Seite, um festzustellen, ob das Gleichungssystem *homogen ist oder nicht.* Als Zweites sollte man überlegen, welche Informationen man aus der allgemeinen Theorie linearer Gleichungssysteme nun über das vorgelegte Gleichungssystem schon hat. Nur wenn man mindestens so viele Unbekannte wie Gleichungen hat, ist Lösbarkeit für jede rechte Seite zu erhoffen. Nur wenn man höchstens so viele Unbekannte wie Gleichungen hat, kann man die Eindeutigkeit der Lösung erhoffen. "Erhoffen" muss hier gesagt werden, weil es nicht sicher ist. Das Problem ist, dass die Gleichungen linear abhängig sein könnten. Das wird bei einem Problem aus den Anwendungen zwar kaum vorkommen, weil es im Konsistenzfall bedeutet, dass man eigentlich überflüssige Gleichungen aufgeschrieben hat, die aus den anderen folgen, und im Inkonsistenzfall, dass man Gleichungen aufgeschrieben hat, die anderen widersprechen, es ist aber (zumindest bei einem System mit mehr als zwei Gleichungen) nicht unmittelbar durch Inspektion der Koeffizientenmatrix zu erkennen. Daher muss man als Drittes die Zeilen-Stufen-Form herstellen, mit der sich die Frage der Abhängigkeit und der Konsistenz des Gleichungssystems entscheiden und die Lösung (bzw. die lineare Schar der Lösungen) auch berechnen lässt.

1)
$$\begin{array}{rrrl} 2x & & -z = & 0 \\ -x & +2y & = & -2 \\ -3x & -y & +2z = & 2 \end{array}$$

ist ein System von 3 linearen Gleichngen für 3 Unbekannte x, y, z (also $m = n = 3$). Wir erwarten also, dass es genau eine Lösung gibt — es sei denn, die drei Gleichungen sind abhängig. (Das sieht zwar nicht so aus, muss aber noch nachgeprüft werden.) Wir stellen das Tableau der erweiterten Koeffizientenmatrix auf, wobei wir gleich die erste mit der zweiten Zeile vertauschen, und machen naheliegende Zeilentransformationen zur Herstellung der Zeilen-Stufen-Form:

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \textcircled{2} \to \textcircled{2} + 2\cdot\textcircled{1} \\ \textcircled{3} \to \textcircled{3} - 3\cdot\textcircled{1} \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & -7 & 2 & 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \textcircled{3} \to \textcircled{3} + \frac{7}{4}\cdot\textcircled{2} \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline \end{array}$$

Die anfängliche Vertauschung der beiden ersten Zeilen, also die Wahl der zweiten als Pivot-Zeile, haben wir vorgenommen, weil so das Auftreten von Brüchen bei den ersten beiden Zeilenoperationen vermieden wird. (Es ist immer günstig, als Pivot-Element 1 oder -1 zu haben.) Das letzte System ist in Zeilen-Stufen-Form, wobei die Koeffizientenmatrix obere Dreiecksgestalt mit Diagonaleinträgen $\neq 0$ hat. Also sind die drei gegebenen linearen Gleichungen tatsächlich unabhängig, und wir haben eine eindeutige Lösung, die wir aus dem letzten Tableau von unten nach oben ablesen können:

$$z = 4\,, \quad y = \frac{1}{4}(-4 + z) = 0\,, \quad x = 2 + 2y = 2\,.$$

Um die Nullen in der ursprünglichen Koeffizientenmatrix besser auszunutzen, hätten wir auch zu Beginn die erste mit der dritten Spalte vertauschen und wie folgt rechnen können, wobei wir die Vertauschung der Variablen in der Kopfzeile festhalten:

$$\begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \textcircled{3} \to \textcircled{3} + 2\cdot\textcircled{1} \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \textcircled{3} \to 2\cdot\textcircled{3} + \textcircled{2} \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Hieraus lesen wir erneut von unten nach oben die eindeutige Lösung $x = 2$, $y = 0$, $z = 4$ ab, weil uns die Kopfzeile daran erinnert, dass die letzte Spalte nun zur Unbekannten x gehört und die erste zu z. (Ohne die Kopfzeile festzuhalten, hätte es hier leicht passieren können, dass man die falsche Lösung $z = 2$, $y = 0$, $x = 4$ angibt!)

2)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & -2 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

Gegenüber 1) ist hier nur der Koeffizient a_{22}, also der Koeffizient von y in der zweiten Gleichung, von 2 auf 1 abgeändert. Wenn wir genau dieselben Zeilenoperationen wie in 1) durchführen, wobei wir nur zu verfolgen brauchen, wie diese Änderung sich auswirkt, so verläuft die Rechnung nun so:

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \textcircled{2} \to \textcircled{2} + 2\cdot\textcircled{1} \\ \textcircled{3} \to \textcircled{3} - 3\cdot\textcircled{1} \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & 2 & 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{c} \Longleftrightarrow \\ \textcircled{3} \to \textcircled{3} + 2\cdot\textcircled{2} \end{array} \quad \begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Die Zeilen-Stufen-Form enhält nun eine Nullzeile, d.h. von den ursprünglichen drei linearen Gleichungen sind nur zwei unabhängig. (Tatsächlich sieht man jetzt — nachdem die Abhängigkeit festgestellt ist —, dass z.B. die erste Gleichung das $(-\frac{1}{2})$-fache der Summe von zweiter und dritter Gleichung ist.) Da auch die rechte Seite der letzten Zeile Null ist, liegt der Konsistenzfall vor, wir können die Nicht-Basisvariable z als beliebigen Parameter $t \in \mathbb{R}$ wählen und erhalten dann $y = \frac{1}{2}(t - 4) = \frac{1}{2}t - 2$ und $x = y + 2 = \frac{1}{2}t$ aus der zweiten und ersten Gleichung des letzten Tableaus. Die allgemeine Lösung ist also die 1-dimensionale lineare Schar $(x, y, z) = (\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t - 2, t) \quad (t \in \mathbb{R})$, die geometrisch eine Gerade im 3-dimensionalen Zahlenraum $\mathbb{R}^3$ beschreibt.

Wenn wir wie in 1) zuerst die Variablen x und z vertauschen, so liefert die Rechnung

$$\begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \underset{\textcircled{3} \to \textcircled{3} + 2\cdot\textcircled{1}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \underset{\textcircled{3} \to \textcircled{3} + \textcircled{2}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

nun die allgemeine Lösung $x = r$, $y = r - 2$, $z = 2x = 2r$ und damit eine andere 1-Parameter-Darstellung derselben Lösungsmenge $(x, y, z) = (r, r-2, 2r) \quad (r \in \mathbb{R})$.

Es gibt immer unendlich viele verschiedene solche linearen Parameterdarstellungen derselben unendlichen Lösungsmenge; die Anzahl der auftretenden Parameter ist aber dieselbe — kleinstmögliche —, wenn man die Parameterdarstellungen wie hier aus einer Zeilen-Stufen-Form mit Wahl der Nicht-Basisvariablen als Parameter ausrechnet. Man kann als Parameter auch die Variable $y = s$ wählen und die allgemeine Lösung damit in der Form $(x, y, z) = (s+2, s, 2s+4) \quad (s \in \mathbb{R})$ darstellen. Nach Spaltenvertauschungen ergibt sich nicht immer, wie hier, die Zeilen-Stufen-Form mit genau denselben Stufenlängen. Die Anzahl l der Stufen ist aber stets dieselbe, weil diese ja nur von der Lösungsmenge abhängt. $(n-l)$ ist ja die Dimension der Lösungsmenge im konsistenten Fall, also die erforderliche Mindestzahl von Parametern in einer linearen Parameterdarstellung der Lösungsmenge.

3) Wir bleiben bei dem Gleichungssystem 2), ändern aber die rechte Seite ab:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & & & = & -1 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

Wenn wir genau dieselben Zeilenoperationen wie in 1) durchführen, wobei wir wieder nur zu verfolgen brauchen, wie diese Änderung sich auswirkt, so ergibt sich nun:

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \underset{\substack{\textcircled{2} \to \textcircled{2} + 2\cdot\textcircled{1} \\ \textcircled{3} \to \textcircled{3} - 3\cdot\textcircled{1}}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & 8 \\ \hline \end{array} \quad \underset{\textcircled{3} \to \textcircled{3} + 2\cdot\textcircled{2}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Die letzte Gleichung hat lauter Nullkoeffizienten, aber rechte Seite $\neq 0$, also liegt der Inkonsistenzfall vor, das Gleichungssystem hat keine Lösung. Dasselbe Ergebnis hätten wir auch für jede andere rechte Seite als -2 in der zweiten Gleichung (entspricht der ersten Zeile des Tableaus) erhalten, wenn wir die rechten Seiten in den anderen Gleichungen beibehalten. Führen wir die Rechnung mit allgemeinen rechten Seiten b_1, b_2, b_3 in den ursprünglichen Gleichungen durch, so verläuft sie so:

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 2 & 0 & -1 & b_1 \\ -3 & -1 & 2 & b_3 \\ \hline \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 2 & -1 & b_1+2b_2 \\ 0 & -4 & 2 & b_3-3b_2 \\ \hline \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 2 & -1 & b_1+2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_1+b_2+b_3 \\ \hline \end{array}$$

Der Konsistenzfall liegt also genau dann vor, wenn $2b_1 + b_2 + b_3 = 0$ ist, und diese Gleichung beschreibt die konsistenten rechten Seiten für das betrachtete Gleichungssystem. Wenn wir andererseits im letzten Tableau als rechte Seite $(r, s, 0)$ einsetzen und die Zeilentransformationen zurückrechnen, so bekommen wir:

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & 0 & r \\ 0 & 2 & -1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & r \\ 0 & 2 & -1 & s \\ 0 & -4 & 2 & -2s \\ \hline \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & r \\ 2 & 0 & -1 & -2r+s \\ -3 & -1 & 2 & 3r-2s \\ \hline \end{array}$$

In dieser Weise haben wir aus der Zeilen-Stufen-Form sowohl eine Beschreibung durch eine lineare Gleichung

$$Z = \{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : 2b_1 + b_2 + b_3 = 0\}$$

als auch eine lineare 2-parametrige Darstellung

$$Z = \{(s-2r, r, 3r-2s) : r, s \in \mathbb{R}\}$$

für die Menge Z der konsistenten rechten Seiten des Gleichungssystems hergeleitet, also für

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} : \begin{array}{rcrcrcl} 2x & & & - & z & = & b_1 \\ -x & + & y & & & = & b_2 \\ -3x & - & y & + & 2z & = & b_3 \end{array} \quad \text{hat eine Lösung} \right\}.$$

Die Menge Z ist hier eine Ebene im Raum $\mathbb{R}^3$ aller möglichen rechten Seiten (b_1, b_2, b_3). Wenn wir also eine rechte Seite zufällig wählen oder eine konsistente rechte Seite wie $(0, -2, 2)$ in zufälliger Weise stören, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir ein lösbares Gleichungssystem erhalten, gleich Null. Das ist immer so, wenn ein lineares Gleichungssystem nicht für jede rechte Seite gelöst werden kann.

4)
$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & z & = & 2 \\ x & & & - & 2z & = & 3 \end{array}$$

Hier haben wir ein System von 2 linearen Gleichungen für 3 Unbekannte x, y, z (also $m = 2, n = 3$). Da es weniger Gleichungen als Unbekannte sind, wissen wir von vorneherein, dass es keine eindeutige Lösung haben kann, sondern entweder gar keine oder eine unendliche Schar von Lösungen. Der Inkonsistenzfall kann nur vorliegen, wenn die Gleichungen abhängig sind. Bei nur zwei Gleichungen wie hier kann man das "mit bloßem Auge" erkennen: Abhängigkeit liegt genau dann vor, wenn man die Koeffizienten der einen Gleichung durch Multiplikation der Koeffizienten der anderen Gleichung mit demselben Faktor erhält —, was hier offenbar nicht geht. Also gibt es für jede rechte Seite eine 1-dimensionale lineare Schar von Lösungen. Die Zeilen-Stufen-Form bestätigt das:

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \underset{①\leftrightarrow②}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \underset{② \to ② - 3\cdot①}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -7 \\ \hline \end{array}$$

(Der erste Schritt vermeidet Brüche.) Die Nicht-Basisvariable ist hier z, und wenn wir diese als beliebigen Parameter $z = t$ wählen, so ergibt sich $y = \frac{1}{2}(7z + 7) = \frac{7}{2}(t + 1)$ aus der unteren Gleichung und $x = 2z + 3 = 2t + 3$ aus der oberen. Die Lösungsmenge ist also

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 2t + 3, \ y = \tfrac{7}{2}(z+1), \ z = t \quad \text{für ein} \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

Dies ist eine Gerade im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Geometrisch kann man das so verstehen: Jede der beiden linearen Gleichungen beschreibt eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, und die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist der Durchschnitt der beiden Ebenen. Die Unabhängigkeit der Gleichungen bedeutet, dass die beiden Ebenen nicht zusammenfallen oder parallel sind; daher ist der Durchschnitt eine Gerade. Wären die beiden Gleichungen aber linear abhängig, so hätten wir (wenn die Koeffizientenmatrix keine Nullzeile enthält) entweder zwei verschiedene parallele Ebenen und damit einen leeren Durchschnitt (Inkonsistenzfall, keine Lösung), oder zwei gleiche Ebenen und damit auch eine Ebene als Durchschnitt (Konsistenzfall, 2-dimensionale lineare Lösungsmenge).

Die obige Rechnung war nicht die einfachste, die zur Lösung des gegebenen Gleichungssystems führt. Da die zweite Gleichung einen Nullkoefizienten hat, führt hier nämlich eine Spaltenvertauschung direkt zu einer Zeilen-Stufen-Form:

$$\begin{array}{rrr|r} x & y & z & \\ \hline 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} y & x & z & \\ \hline -2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Auch hier ist z die Nicht-Basisvariable, und wir erhalten dieselbe Parameterdarstellung der Lösung wie zuvor. Aber wir können auch eine andere Variable zur Nicht-Basisvariablen und damit zum Parameter einer Parameterdarstellung machen:

$$\begin{array}{rrr|r} x & y & z & \\ \hline 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline 1 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \underset{②\to②+2\cdot①}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 7 & 7 \\ \hline \end{array}$$

Hier ist jetzt x Nicht-Basisvariable, und wir erhalten für L die Parameterdarstellung $x = r$, $y = \frac{7}{4}(r-1)$, $z = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$. Auch y können wir zur Nicht-Basisvariablen machen, was die Parameterdarstellung $x = \frac{4}{7}s + 1$, $y = s$, $z = \frac{2}{7}s - 1$ für L ergibt. Natürlich kann man die Parameterdarstellungen auch direkt ineinander umrechnen, indem man $r := 2t + 3$ oder $s := \frac{7}{2}(t-1)$ setzt. Grundsätzlich lassen sich bei zwei unabhängigen Gleichungen alle Unbekannten zur Nicht-Basisvariablen machen, für die nach Streichung der zugehörigen Koeffizientenspalte immer noch ein System von zwei unabhängigen linearen Gleichungen für eine Unbekannte weniger verbleibt.

5)
$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$$

ist eine lineare Gleichung ($m = 1$) für n Unbekannte. Dieses System hat schon Zeilen-Stufen-Form, und zwar mit einer Stufe, wenn ein Koeffizient $a_j \neq 0$ ist (und mit Null Stufen sonst). Man kann mit Variablenvertauschung dann diesen Koeffizienten an die vorderste Position bringen, was die anderen Unbekannten zu Nicht-Basisvariablen macht. Wählt man diese als beliebige reelle Parameter, etwa $x_1 = t_1, \ldots, x_{j-1} = t_{j-1}$, $x_{j+1} = t_j$, $\ldots, x_n = t_{n-1}$, so ergibt sich $x_j = \frac{1}{a_j}(b - a_1t_1 - \ldots - a_{j-1}t_{j-1} - a_{j+1}t_j - \ldots - a_nt_{n-1})$ und damit eine $(n-1)$-parametrige Darstellung der Lösungsmenge. Je nach Wahl des Koeffizienten $a_j \neq 0$ bekommt man so unterschiedliche Parameterdarstellungen der $(n-1)$-dimensionalen Lösungsmenge (und auf den ersten Blick ist nicht zu erkennen, dass solche verschiedenen Parameterdarstellungen tatsächlich dieselbe Menge beschreiben). Sind alle Koeffizienten Null und auch die rechte Seite, so ist die Lösungsmenge natürlich der ganze Raum $\mathbb{R}^n$, d.h. man kann alle n Unbekannten als beliebige reelle Parameter wählen und erhält stets eine Lösung. Sindalle Koeffizienten Null, aber $b \neq 0$, so liegt Inkonsistenz vor.

6) Wir betrachten ein allgemeines System von 2 linearen Gleichungen für 2 Unbekannte:

$$\begin{aligned} ax + by &= b_1 \\ cx + dy &= b_2 \end{aligned}$$

Die möglichen Zeilen-Stufen-Formen sind

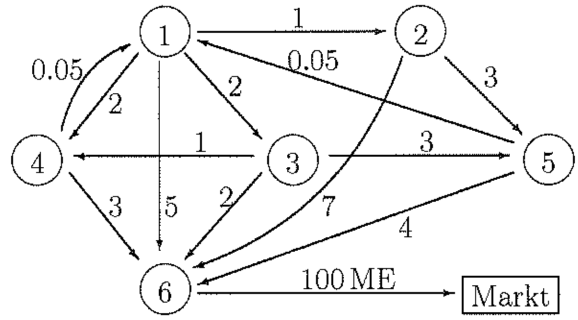
$$\left(\begin{array}{cc|c} c_1 & * & * \\ 0 & c_2 & * \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} c_1 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & c_1 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

mit $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ und irgendwelchen Einträgen "$*$". Die erste oder zweite Form ergibt sich, wenn $a \neq 0$ ist, dann $c_1 = a$ und $c_2 = \frac{1}{a}(ad - bc)$, oder wenn $c \neq 0$ ist, dann $c_1 = c$ und $c_2 = -\frac{1}{c}(ad - bc)$; je nachdem ob $ad - bc \neq 0$ ist oder nicht, hat man die erste oder zweite Form. Im Fall $a = 0 = c$ und $b \neq 0$ oder $d \neq 0$ ergibt sich die dritte Form, bei $a = b = c = d = 0$ die vierte.

Hier wird erneut die Bedeutung der **Determinante** $ad - bc$ der Koeffizientenmatrix deutlich, die wir schon früher diskutiert haben: Genau wenn die Determinante von Null verschieden ist, ist das Problem für jede rechte Seite wohlgestellt, also eindeutig lösbar.

Andernfalls existiert entweder keine Lösung, nämlich wenn die Koeffizienten in einer Zeile der Zeilen-Stufen-Form Null sind, der zugehörige letzte Eintrag $*$ aber nicht, oder es existiert eine unendliche Lösungsmenge, die sich als 1-dimensionale lineare Menge parametrisieren lässt im Fall der Zeilen-Stufen-Formen zwei oder drei, oder die alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ enthält im Fall der letzten Form mit Nulleinträgen auch in der letzten Spalte.

7) Als Beispiel für das Auftreten linearer Gleichungssysteme in ökonomischem Problemstellungen betrachten wir folgenden gerichteten und bewerteten Graphen, der eine (z.B. chemische) **Produktion mit Verflechtung** beschreibt:



Wir haben schon erklärt, welche Information in einem solchen "Gozintographen" codiert ist: Ein Pfeil $i \xrightarrow{r} j$ bedeutet, dass für die Produktion einer Mengeneinheit (ME) des Produkts j genau r Mengeneinheiten des Vorprodukts i benötigt werden. Vom Endprodukt 6 sind 100 ME an den Markt zu liefern.

Gesucht sind hier natürlich die Outputs $x_1, \ldots, x_6$ (in ME) der Produkte 1, …, 6, die hergestellt werden müssen, damit die Lieferung erfolgen kann. Wenn wir annehmen, dass ohne Überschuss produziert, von jedem Produkt also nur die benötigte Menge hergestellt werden soll, so können wir ein **lineares Gleichungssystem für die Produktion** wie folgt aufstellen: Für jeden Knoten i bestimmt man alle von dort ausgehenden Pfeile $i \xrightarrow{r_{ij}} j$ mit ihren Bewertungen r_{ij}. Für die Produktion von x_j Einheiten des Produkts Nummer j werden $r_{ij}x_j$ Einheiten des Vorprodukts i benötigt. Die Summe dieser Werte über alle von i ausgehenden Pfeile ist also die von i insgesamt benötigte Menge, und diese Summe setzt man $= x_i$, weil ja von dem Produkt i nicht mehr als nötig hergestellt werden soll. Für den obigen Graphen gibt das folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
2x_4 + 5x_6 + 2x_3 + \ x_2 &= x_1 \\
7x_6 + 3x_5 &= x_2 \\
x_4 + 2x_6 + 3x_5 &= x_3 \\
0.05x_1 + 3x_6 &= x_4 \\
0.05x_1 + 4x_6 &= x_5 \\
100 &= x_6
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung beschreibt, dass 100 ME des Endprodukts an den Markt zu liefern sind. Andere Unbekannte als x_6 treten in dieser letzten Gleichung nicht auf, weil hier im Produktionsablauf kein Anteil des Endprodukts für die Produktion eines Vorprodukts benötigt wird (was im Prinzip, bei biotechnologischen oder chemischen Produktionsabläufen, durchaus auch vorkommen kann). Wenn wir das System nach Unbekannten sortieren, so ergibt sich folgendes Tableau:

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & -1 & -2 & -2 & 0 & -5 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -7 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\
-0.05 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\
-0.05 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \\
\hline
\end{array}$$

Die Einträge "1" auf der Diagonalen hat man offenbar immer, wenn der Verflechtungsgraph keine Schleifen hat (keine Pfeile von (i) nach (i)). Außerdem hat das entstehende Gleichungssystem immer gleich viele Gleichungen wie Unbekannte, eben für jedes beteiligte Vor-, Zwischen- oder Endprodukt eine Gleichung. Man kann also hoffen, dass es eine eindeutige Lösung gibt. Im vorliegenden Fall hat die Koeffizientenmatrix schon nahezu Dreiecksgestalt. Die Herstellung der Zeilen-Stufen-Form ist daher mit wenigen Zeilenoperationen möglich: Man addiert die zweite und das Doppelte der dritten Zeile zur ersten, subtrahiert die fünfte von der vierten, addiert dann das Vierfache der vierten zur ersten Zeile und schließlich das 0.05-fache der ersten zur fünften. Resultat ist das Dreiecks-Tableau

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & -13 & -12 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -7 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & -4.6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 100 \\
\hline
\end{array}$$

mit der eindeutigen Lösung $x_6 = 100$, $x_5 = (4.6/.35)x_6 \approx 1314.29$, $x_4 = x_5 - x_6 \approx 1214.29$, $x_3 = x_4 + 3x_5 + 2x_6 \approx 5357.14$, $x_2 = 3x_5 + 7x_6 \approx 4642.87$ und $x_1 = 13x_5 + 12x_6 \approx 18\,285.71$ (jeweils Mengeneinheiten).

Wir schließen noch einige Beobachtungen an: Dass die Koeffizientenmatrix in diesem Beispiel schon nahezu Dreiecksgestalt hat, liegt natürlich daran, dass hier nur wenige Zwischenprodukte in die Herstellung der eigenen Vorprodukte eingehen. Bei einfachen Produktionsabläufen kommt so etwas überhaupt nicht vor, und dann hat man schon direkt Dreiecksgestalt der Koeffizientenmatrix. Es gibt aber in der Realität noch sehr viel kompliziertere Produktionsverflechtungen als die hier behandelte. Auch können durchaus Schleifen vorkommen, d.h. ein Teil eines End- oder Zwischenprodukts wird zur Herstellung des Produkts selbst benötigt. (Für den Produktionsbeginn muss man sich diesen Teil dann natürlich zunächst "leihen" und kann ihn am Ende wieder zurückgeben.)

Obwohl sich stets ein lineares Gleichungssystem mit ebenso vielen Unbekannten wie Gleichungen ergibt, ist dessen eindeutige Lösbarkeit für beliebig ausgedachte Produktionspläne keineswegs garantiert. Aus der allgemeinen Theorie wissen wir, dass eindeutige Lösbarkeit genau dann vorliegt, wenn das homogene System nur die triviale Lösung hat. Andernfalls gäbe es einen Produktionsablauf, bei dem alle produzierten Mengen für die Produktion selbst wieder verbraucht werden. Eine solche Situation liegt z.B. vor, wenn man zwei Produkte hat und den Produktionsplan $(1) \xrightarrow{1} (2)$ sowie $(2) \xrightarrow{1} (1)$, d.h. für die Produktion einer ME des einen wird jeweils eine ME des anderen Produkts benötigt. Derartiges ist natürlich ökonomisch unsinnig, und das entsprechende inhomogene Gleichungssystem ist niemals lösbar, d.h. Produktion unter Abgabe einer nichtleeren Produktmenge an den Markt ist nicht möglich.

Bedenken muss man auch, dass *nur Lösungen mit positiven Werten der Outputs x_i ökonomisch sinnvoll sind.* Selbst wenn eine eindeutige Lösung existiert, so braucht diese Positivitätsbedingung nicht erfüllt zu sein. Eine solche Situation liegt z.B. vor, wenn für die Produktion einer ME des Vorprodukts (i) von einem späteren Produkt (j) mehr Einheiten gebraucht werden, als mit einer ME von (i) überhaupt produziert werden kann, also z.B. bei einer Schleife mit Bewertung > 1 oder bei einem Produktionsplan $(1) \xrightarrow{1} (2)$ sowie $(2) \xrightarrow{2} (1)$. Das entsprechende Gleichungssystem $x_1 - x_2 = b_1$, $x_2 - 2x_1 = b_2$ hat dann zwar für alle rechten Seiten b_1, b_2 eine eindeutige Lösung, aber für $b_1 \geq 0$ und $b_2 \geq 0$ niemals eine Lösung mit positiver Komponente x_1 oder x_2 (denn es folgt ja $x_1 = x_2 + b_1 \geq x_2 = 2x_1 + b_2 \geq 2x_1$). Ökonomisch ist ein derartiger Produktionsplan natürlich von vorneherein unsinnig, aber bei einem komplizierten Produktionsverflechtungsgraphen ist nicht ohne weiteres zu erkennen, ob die beschriebene Produktionssituation sinnvoll ist und tatsächlich zur Produktion von Mengen führt, die an den Markt abgegeben werden können und nicht intern im Produktionsablauf verbraucht werden.

Es ist nicht nur für die hier betrachtete, sondern auch für diverse andere ökonomische Problemstellungen eine wichtige und mathematisch gesehen auch interessante Frage, wie eine quadratische Koeffizientenmatrix beschaffen sein muss, damit das zugehörige System von n linearen Gleichungen für n Unbekannte bei jeder Wahl von nichtnegativen rechten Seiten (Mengen, die an den Markt gehen sollen), die nicht alle Null sind, eine eindeutige Lösung mit lauter positiven Komponenten hat. Man nennt derartige quadratische Koeffizientenmatrizen *invers positive Matrizen.* Matrizen mit positive Einträgen auf der Diagonalen und nichtpositiven Einträgen von genügend kleinem Betrag sonst haben z.B. diese Eigenschaft. Die weitere Diskussion würde hier aber zu weit führen (s. 3.4). Für ökonomische Anwendungen wie oben kann man einfach das Gleichungssystem aufstellen, durch Herstellung der Zeilenstufen-Form feststellen, ob es eine eindeutige Lösung gibt, und durch Berechnung der Lösung dann überprüfen, ob diese Lösung auch positive Komponenten hat. Wenn ja, so hat man eine eindeutige ökonomisch sinnvolle Lösung; wenn nicht, so weiß man, dass die gestellte Aufgabe keine ökonomisch sinnvolle Lösung hat.

8) Noch ein ökonomisches Beispiel, die **Innerbetriebliche Leistungsverrechnung**: Hier geht es darum, innerbetriebliche Vorleistungen an Teilbetriebe angemessen mit fiktiven Preisen zu bewerten, damit die Selbstkosten und die Rentabilität der Teilbetriebe ermittelt werden können. Man unterscheidet *primäre Kosten,* die den Betriebsteilen / Kostenstellen direkt entstehen (Löhne, Materialkosten, Abschreibungen,...), und *sekundäre Kosten,* das sind die fiktiven Kosten von unentgeltlich gewährten innerbetrieblichen Leistungen (Vorprodukte, Energie, Wartungs- und Reparaturarbeiten,...). Zur Erfassung der tatsächlichen Kosten eines Teilbetriebs sind dessen primären Kosten die mit angemessenen *Verrechnungspreisen* bewerteten Leistungen hinzuzurechnen, die ihm von anderen Betriebsteilen gewährt werden; die so ermittelten Kosten sind als *Verrechungskosten* zu bilanzieren. Ebenso müssen natürlich die von dem Teilbetrieb an andere Betriebsteile bzw. an den Gesamtbetrieb abgegebenen Leistungen mit angemessenen Verrechnungspreisen bewertet werden, wenn die Rentabilität des Teilbetriebs beurteilt werden soll.

Das *Problem* ist, dass die angemessenen Verrechnungspreise für die Leistungen eines Teilbetriebs nicht nur von dessen primären Kosten abhängen, sondern auch von dessen sekundären Kosten, also von den Verrechnungspreisen für die von anderen Betriebsteilen empfangenen Leistungen. Man kann daher die "richtigen" Verrechnungspreise nicht separat für jede einzelne Kostenstelle im Betrieb bestimmen, sondern nur simultan für alle Betriebsteile gemeinsam. Dies wird auf ein lineares Gleichungssystem führen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es n Teilbetriebe $(1), \ldots, (n)$ gibt, die an den Betrieb jeweils Leistungen einer einzigen Art abgeben und mit Verrechnungspreisen $p_1, \ldots, p_n$ (Geldeinheiten pro Leistungseinheit) bewertet werden sollen. Die *interne Leistungsbilanz* kann dann z.B. durch einen bewerteten gerichteten Graphen wie in 7) dargestellt werden, wobei ein Pfeil $(j) \xrightarrow{a_{ij}} (i)$ bedeutet, dass a_{ij} Leistungseinheiten von (j) an (i) abgegeben werden. Eine andere Möglichkeit ist die Darstellung durch eine *Verflechtungsmatrix* (a_{ij}), wobei ein Nulleintrag a_{ij} bedeutet, dass von (j) keine Leistung an (i) abgegeben wird, und ein Diagonaleintrag $a_{ii} \neq 0$ die von (i) selbst verbrauchte Eigenleistung angibt (das entspricht einer Schleife im Verflechtungsgraphen). Wir haben das schon früher diskutiert. Weitere relevante Daten sind hier noch die bei der Stelle (i) anfallenden primären Kosten k_i (Geldeinheiten) und die von (i) an den Betrieb insgesamt gelieferte Leistung l_i (Leistungseinheiten). Der Geldwert dieser erbrachten Leistung ist dann mit $l_i p_i$ anzusetzen, der Wert der von (j) an (i) abgegebenen Leistung mit $a_{ij} p_j$, die gesamten Kosten des Teilbetriebs (i) also mit $k_i + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n$. Wenn man davon ausgeht, dass Teilbetriebe nicht Gewinne auf Kosten anderer Teilbetriebe machen sollen, so wird man postulieren, dass für jeden Teilbetrieb (i) gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Wert der von } (i) \text{ an den}\\ \text{Betrieb erbrachten Leistung}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{Summe der bei } (i) \text{ anfallenden}\\ \text{primären und sekundären Kosten,}\end{array}\right.$$

d.h. in Formeln

$$l_i p_i = k_i + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \ldots + a_{in}p_n \qquad \text{für} \quad i = 1 \ldots n\,.$$

Dies ist das angekündigte Gleichungssystem. Nach Sortieren der Variablen erhalten wir das folgende **lineare Gleichungssystem für die Verrechnungspreise** $p_1, \ldots, p_n$:

$$\begin{array}{rrrrl}
(l_1 - a_{11})p_1 & - a_{12}\,p_2 & - \ \ldots & - a_{1n}p_n & = k_1 \\
-a_{21}p_1 & +(l_2 - a_{22})p_2 & - \ \ldots & - a_{2n}p_n & = k_2 \\
\vdots & & & & \ \ \vdots \\
-a_{n1}p_1 & - a_{n2}p_2 & - \ \ldots & +(l_n - a_{nn})p_n & = k_n
\end{array}$$

(Zur Erinnerung: a_{ij} ist die von Betriebsteil (j) an (i) abgegebene Leistung, k_i sind die primären Kosten bei (i), l_i ist die von (i) an den Gesamtbetrieb abgegebene Leistung.)

Die Koeffizienten-$n \times n$-Matrix dieses Gleichungssystems hat positive Diagonaleinträge ($l_i > a_{ii}$, sonst würde der Teilbetrieb (i) ja mehr Leistung verbrauchen als er erbringt) und hat ansonsten nichtpositive Einträge. Diese Struktur ist typisch für *invers positive Matrizen*, wie wir in 7) schon erwähnt haben, d.h. man kann erwarten, dass bei positiven rechten Seiten $k_i > 0$ wie hier genau eine Lösung $(p_1, \ldots, p_n)$ existiert, die zudem lauter positive Komponenten $p_j > 0$ hat, also ökonomisch sinnvoll ist. (Es gibt aber auch interne Leistungsbilanzen, die auf ein Gleichungssystem für die Verrechnungspreise führen, das keine eindeutige Lösung mit positiven Komponenten besitzt. Das ist dann ein Hinweis darauf, dass bei einem solchen Ablauf etwas ökonomisch Unsinniges passiert, z.B. dass ein Teilbetrieb bei jeder Wahl der Verrechnungspreise mehr Kosten verursacht, als seine abgegebene Leistung wert ist.) Hat man die Verrechnungspreise durch Lösung des Gleichungssystems bestimmt und sind sie ökonomisch sinnvoll (positiv, eindeutig bestimmt), so kann man anschließend auch noch die *Kosten der Betriebsteile, die keine Leistungen an den Betrieb abgeben*, sondern nur Leistungen von Betriebsteilen empfangen, als deren primäre plus sekundäre Kosten berechnen.

Ein konkretes Beispiel (nach Tietze, § 9.2): In einem Unternehmen gibt es vier Hilfskostenstellen (1) ,…,(4) , die an sich gegenseitig und an drei Hauptkostenstellen $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ Leistungen erbringen. Die Hauptkostenstellen liefern ihre Leistungen an den Markt und nicht an irgendwelche Betriebsteile. Die Leistungsbilanz sieht wie folgt aus:

↓ Empfänger / Lieferant →	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	10	40	100	80
(2)	30	10	80	20
(3)	40	50	0	20
(4)	50	100	40	30
$\boxed{1}$	80	100	180	250
$\boxed{2}$	90	150	150	200
$\boxed{3}$	100	150	30	200

	Primärkosten	Gesamtleistung
(1)	2020	400
(2)	3700	600
(3)	1960	580
(4)	7700	800
$\boxed{1}$	15200	—
$\boxed{2}$	21000	—
$\boxed{3}$	45000	—

Diese Tabellen geben die relevanten Daten zur Leistungsbilanz an; die Einträge in der letzten Spalte der zweiten Tabelle sind die Spaltensummen der Einträge in der ersten Tabelle. Das lineare Gleichungssystem für die unbekannten Verrechnungspreise, welche die von (1) ,…,(4) abgegebenen Leistungen bewerten sollen, hat hier das folgende Tableau:

$$\begin{array}{rrrr|r} 390 & -40 & -100 & -80 & 2020 \\ -30 & 590 & -80 & -20 & 3700 \\ -40 & -50 & 580 & -20 & 1960 \\ -50 & -100 & -40 & 770 & 7700 \\ \hline \end{array}$$

Zur Herstellung der Zeilen-Stufen-Form dividiere alle Zeilen durch 10, vertausche die erste mit der vierten und die zweite mit der dritten Zeile, addiere dann geeignete Vielfache der (neuen) ersten Zeile zur zweiten, dritten und vierten Zeile, um Nullen in den Positionen 2, 3 und 4 der ersten Spalte zu erzeugen, sodann addiere Vielfache der zweiten zur dritten und vierten Zeile, um auch in der zweiten Spalte Nullen in den Positionen 3 und 4 zu erzeugen, schließlich erzeuge noch eine Null in Position 4 der dritten Spalte und addiere die vorherige vierte Zeile zur dritten, um diese noch zu vereinfachen. Das Resultat ist — wenn wir korrekt gerechnet haben — folgendes Tableau in Dreiecksgestalt:

$$\begin{array}{rrrr|r} -5 & -10 & -4 & 77 & 770 \\ 0 & 3 & 61.2 & -63.6 & -420 \\ 0 & 0 & 300 & 184 & 3736 \\ 0 & 0 & 0 & 483.59\ldots & 5765.43\ldots \\ \hline \end{array}$$

mit der von unten nach oben eindeutig zu berechnenden Lösung $p_4 \approx 11.92$, $p_3 \approx 5.14$, $p_2 \approx 7.87$, $p_1 \approx 9.75$ (jeweils Geldeinheiten pro Leistungseinheit). Damit sind die Verrechnungspreise bestimmt, und das Ergebnis ist auch ökonomisch sinnvoll, da alle p_j positiv sind. Mit diesen Verrechnungspreisen sind nun die Kosten aller Betriebsteile berechenbar. Für die Hilfskostenstelle (1) zum Beispiel sind die Kosten 2020 (Primärkosten) $+10p_1+40p_2+100p_3+80p_4$ (sekundäre Kosten) ≈ 3899.90 Geldeinheiten; für die Hauptkostenstelle $\boxed{3}$ sind es 45 000 (Primärkosten) $+100p_1+150p_2+30p_3+200p_4$ (Sekundärkosten) $\approx 49\,693.70$ Geldeinheiten insgesamt. ■

Die obigen Beispiele für das Auftreten linearer Gleichungssysteme bei ökonomischen Fragestellungen waren noch sehr einfach gehalten. In der Praxis kann man es mit sehr viel mehr Unbekannten und sehr viel mehr linearen Gleichungen zu tun haben. Was die Theorie angeht, ist das kein prinzipieller Unterschied: Die Zeilen–Stufen–Matrix ist dann eben auch sehr groß. Für die konkrete Berechnung der Lösungen ist aber die Herstellung der Zeilen–Stufen–Form, also die Ausführung des Eliminationsverfahrens, ab einer gewissen Größe von Hand kaum noch durchzuführen. Natürlich gibt es für solche Fälle Rechenprogramme zum Lösen linearer Gleichungssysteme. Bei sehr großen linearen Gleichungssystemen (mit mehr als 100 Unbekannten und Gleichungen etwa) ist aber auch für Computer die exakte Ausführung des Eliminationsverfahrens zu aufwendig. Man benutzt dann numerische Verfahren, welche die Lösung näherungsweise mit akzeptabler Genauigkeit berechnen. Solche Verfahren können allerdings nur befriedigend funktionieren, wenn ein wohlgestelltes Problem vorliegt, also eine eindeutige Lösung existiert. (Wenn es keine Lösung gibt, kann auch ein numerisches Verfahren keine berechnen; gibt es aber viele Lösungen, so wird das Verfahren das Problem haben, welche davon es berechnen soll.)

Wir wollen nun noch eine "Verbesserung" der Zeilen–Stufen–Form besprechen, die nützlich ist wenn man *Gleichungssysteme mit derselben Koeffizientenmatrix für mehrere rechte Spaltenvektoren* zu lösen hat. Man denke z.B. an einen Produktionsplan wie im vorangegangenen Beispiel 7), der für unterschiedliche Produktlieferungen an den Markt durchgerechnet werden soll. In solchen Fällen ist es zweckmäßig, die Koeffizientenmatrix gleich um alle Spalten von interessierenden rechten Seiten zu erweitern und diese Spalten bei der Herstellung der Zeilen-Stufen-Form mit den Zeilentransformationen mit umzuformen. Man betrachtet also dann erweiterte Koeffizientenmatrizen der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 & c_1 & \dots & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 & c_2 & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m & c_m & \dots & z_m \end{array}\right)$$

und kann nach Erreichen der Zeilen-Stufen-Form für die Koeffizientenmatrix (a_{ij}) dann die Lösungen für jede einbezogene Spalte von rechten Seiten von unten nach oben berechnen, ohne für jede einzelne Spalte das ganze Eliminationsverfahren von vorne beginnen zu müssen.

Hat man allerdings für sehr viele rechte Spalten zu lösen (für mehr als $\min(m, n)$ Stück), so gibt es eine bessere Methode. Mit etwas mehr Rechenaufwand kann man nämlich die Zeilen-Stufen-Form noch so vereinfachen, dass sich die Auflösung des Gleichungssystems von unten nach oben ohne jede Rechnung ergibt. Man muss dazu nur bemerken, dass man durch weitere Zeilenoperationen auch über den "Stufenanfängen" Nulleinträge erzeugen kann. Danach steht in den Spalten, die den Basisvariablen entsprechen, jeweils nur noch ein Eintrag $\neq 0$, und indem man die entsprechende Zeile durch diesen Eintrag dividiert, erreicht man, dass sein Wert 1 ist. Vertauscht man schließlich noch die Spalten so, dass die Spalten der Basisvariablen zuerst kommen, so hat man folgendes Ergebnis:

SATZ (kanonische Zeilen-Stufen-Form):
(i) *Durch zulässige Zeilentransformationen kann die erweiterte Koeffizientenmatrix* $(A|b)$ *eines Systems von* m *linearen Gleichungen für* n *Unbekannte stets auf eine Zeilen-Stufen-Form gebracht werden, in der die zu den Basisvariablen gehörenden Spalten kanonische Einheitsvektoren sind. Durch zusätzliche Spaltenvertauschungen in der Koeffizientenmatrix, welche die Basisvariablen-Spalten nach vorne bringen, kann diese Matrix also in folgende sog.* **kanonische Zeilen-Stufen-Form** *gebracht werden:*

$$
\begin{array}{rc}
\begin{array}{r} l\left\{\rule{0pt}{4em}\right. \\ m-l\left\{\rule{0pt}{3em}\right. \end{array}
&
\left(\begin{array}{cccc|c|c}
1 & & & & & d_1 \\
 & 1 & & 0 & & d_2 \\
 & & \ddots & & * & \vdots \\
0 & & & 1 & & d_l \\ \hline
 & & & & & d_{l+1} \\
 & 0 & & & 0 & \vdots \\
 & & & & & d_m
\end{array}\right)
\\
 & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{l}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{n-l}\qquad
\end{array}
$$

($0 \le l \le \min(m,n)$ die maximale Zahl der unabhängigen Gleichungen, $d_1, \ldots, d_m \in \mathbb{R}$, beliebige reelle Einträge im Rechteck "$*$" und Nulleinträge in den mit "0" gekennzeichneten Dreiecken und Rechtecken).

(ii) *Wenn eine der rechten Seiten* $d_{l+1}, \ldots, d_m$ *von Null verschieden ist, so ist das Gleichungssystem inkonsistent. Andernfalls erhält man die Lösungen, indem man die Nichtbasisvariablen, die nach den in (i) vorgenommenen Spaltenvertauschungen den Spalten mit Nummern* $l+1, \ldots, n$ *entsprechen, als beliebige reelle Parameter wählt, und die Werte der Basisvariablen, die dann den Spalten mit Nummern* $1, \ldots, l$ *zugeordnet sind, aus den ersten* l *Gleichungen direkt entnimmt (ohne das System in Zeilen-Stufen-Form von unten nach oben auflösen zu müssen).*

(iii) *Bei vorgegebener Zuordnung der Unbekannten zu den Koeffizientenspalten sind Form und Einträge der Koeffizientenmatrix in der kanonischen Zeilen-Stufen-Form eindeutig bestimmt durch die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems* $Ax = 0$. *Im Konsistenzfall sind auch die Einträge* d_i *der rechten Seite eindeutig bestimmt durch die Lösungsmenge des inhomogenen Systems* $Ax = b$. ■

Dabei heißt ein Spaltenvektor (oder ein m-tupel) in $\mathbb{R}^m$ ein **kanonischer Einheitsvektor** oder ein **kanonischer Basisvektor**, wenn er genau einen Eintrag 1 hat und sonst lauter Einträge 0. Befindet sich die eingetragene 1 an der i-ten Position, so schreiben wir dafür (oder für den entsprechenden m-gliedrigen Spaltenvektor)

$$e_i := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-i-1}) \in \mathbb{R}^m ,$$

und man nennt $e_1, e_2, \ldots, e_m$ die **kanonische Basis** des m-dimensionalen Zahlenraums $\mathbb{R}^m$. (Wenn nötig, so muss man die Gliederzahl der kanonischen Basisvektoren in der Notation kenntlich machen, indem man z.B. genauer $e_i^{(m)}$ für die kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{R}^m$ schreibt.) In der Literatur zur Mathematik für die Wirtschaftswissenschaften findet sich auch die Bezeichnung "Einheitsvektor" für die kanonischen Einheitsvektoren. Das ist aber nicht korrekt, weil man unter einem Einheitsvektor allgemein einen Vektor der Länge 1 versteht, und davon gibt es viel mehr als nur die ganz speziellen kanonischen Basisvektoren. Zum Beispiel sind auch $(-1, 0, \ldots, 0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0)$, $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0), \ldots$ Einheitsvektoren (Länge 1), aber keine kanonischen Einheitsvektoren.

Der *Beweis* der beiden ersten Aussagen ist aufgrund der Vorbemerkungen eigentlich schon klar. Wegen seiner praktischen Bedeutung beschreiben wir aber nochmals konkret das Verfahren, das zur kanonischen Zeilen-Stufen-Form führt:

Man sucht sich zunächst irgendeinen Eintrag a_{ij} der Koeffizienten-Matrix A aus, der von Null verschieden ist. (Wenn alle Koeffizienten Null sind, so ist nichts mehr zu beweisen; links steht schon die kanonische Zeilen-Stufen-Form mit $l = 0$, und je nachdem, ob $b \in \mathbb{R}^m$ eine Nullspalte ist oder nicht, sind alle $x \in \mathbb{R}^n$ Lösungen oder es gibt keine.) Dies ist das sog. erste *Pivot-Element.* In der Praxis wählt man es natürlich so, dass die Rechnungen möglichst einfach werden; ein Pivot-Element mit Wert ± 1 ist z.B. für Rechnungen von Hand oft günstig. Bei numerischen Verfahren zur Lösung großer linearer Gleichungssysteme wählt man oft ein Pivot-Element von möglichst großem Betrag, weil durch das Pivot-Element im weiteren Verlauf des Verfahrens zu dividieren ist und weil die Division mit Zahlen von kleinem Betrag große Rundungsfehler mit sich bringt. Nun dividiert man die i-te Zeile der erweiterten Koeffizientenmatrix durch das Pivot-Element a_{ij} und subtrahiert danach für $h = 1 \dots m$ mit $h \neq i$ das a_{hj}-fache der (dividierten) i-ten Zeile von der h-ten Zeile. Resultat ist eine Matrix, die als j-te Spalte den kanonischen Einheitsspaltenvektor e_i hat. Durch eine Zeilenvertauschung bringt man die i-te Zeile nach oben, durch eine Spaltenvertauschung die j-te Spalte nach vorne. Danach hat man als erste Spalte den kanonischen Basisvektor e_1, also eine erweiterte Koeffizientenmatrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & * \\ 0 & & * \\ \vdots & \underbrace{\quad B \quad}_{n-1} & \vdots \\ 0 & & * \end{array}\right)$$

mit einer $m \times (n-1)$-Matrix B (und beliebigen reellen Einträgen "$*$"). Mit dieser durch die letzte Spalte erweiterten Matrix $(B|*)$ führt man nun dasselbe Verfahren durch, wobei man aber das Pivot-Element nicht in der ersten Zeile wählen darf, weil sonst die Nullen, die man in der ersten Spalte schon erzeugt hat, wieder zerstört werden würden. (Wenn B von Null verschiedene Einträge nur in der ersten Zeile hat, so ist man schon fertig.) Resultat ist dann eine erweiterte Koeffizientenmatrix, deren beide erste Spalten kanonische Einheitsvektoren sind:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & & * \\ 0 & 1 & & * \\ 0 & 0 & \underbrace{\quad C \quad}_{n-2} & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & * \end{array}\right)$$

Nun arbeitet man mit $(C|*)$ weiter, wobei das Pivot-Element nicht in den beiden oberen Zeilen gewählt werden darf. Nach endlich vielen Schritten gelangt man so offenbar zu der in Teil (i) des Satzes angegebenen kanonischen Zeilen-Stufen-Form. Wichtig ist bei dem Verfahren: *Pivot-Zeilen, die zur Herstellung von Nullen in einer Spalte verwendet wurden, sind danach tabu!* Sonst würde man ja bereits erzeugte Nulleinträge wieder zerstören.

Um die Eindeutigkeitsaussage (iii) des Satzes einzusehen, muss man nur bemerken, dass zwei Gleichungen $x_h + c_{h\,l+1}x_{l+1} + \ldots + c_{hn}x_n = d_h$ und $x_h + \widetilde{c}_{h\,l+1}x_{l+1} + \ldots + \widetilde{c}_{hn}x_n = \widetilde{d}_h$ genau dann für jede Wahl von $x_{l+1}, \ldots, x_n$ dieselbe Lösung x_h haben, wenn erstens $d_h = \widetilde{d}_h$ ist (wähle $x_{l+1} = \ldots = x_n := 0$) und zweitens $c_{hj} = \widetilde{c}_{hj}$ für $j = l{+}1 \dots n$ (wähle $x_j := 1$ und $x_k := 0$ für $l{+}1 \leq k \leq n$ mit $k \neq j$).

DISKUSSION: 1) Das beschriebene Verfahren heißt auch **vollständige Gauß-Elimination**, weil am Ende jede Basisvariable aus allen Gleichungen außer einer vollständig eliminiert ist. Der Vorteil ist, dass man dann, nach Festsetzung der beliebig wählbaren Werte der Nicht-Basisvariablen, die Werte der Basisvariablen unmittelbar erhält, ohne wie bei der gewöhnlichen (nichtkanonischen) Zeilen-Stufen-Form das vereinfachte Gleichungssystem noch von unten nach oben lösen zu müssen, weil die Werte jeder Basisvariablen von denen der Basisvariablen mit größerer Nummer abhängen können. Die Berechnung der Lösungen ist also einfacher, wenn man die kanonische Zeilen-Stufen-Form des Gleichungssystems hergestellt hat. Allerdings erfordert die Erzeugung der kanonischen Zeilen-Stufen-Form mehr Zeilenoperationen, also einen größeren Aufwand, als für die gewöhnliche Zeilen-Stufen-Form nötig ist. Und dieser Mehraufwand überwiegt meistens nicht die dadurch erzielte Arbeitsersparnis bei der Lösungsberechnung. Wenn es also nur darum geht, die Lösungen eines konkreten linearen Gleichungssystems zu bestimmen, so ist die "unvollständige" Gauß-Elimination, die zu einer gewöhnlichen Zeilen-Stufen-Form führt, der einfachere Weg mit dem kleineren Rechenaufwand.

2) Die kanonische Zeilen-Stufen-Form hat also weniger praktische, sondern vor allem theoretische Bedeutung. Ein wichtiger Gesichtspunkt, den wir als Teil (iii) des Satzes schon hervorgehoben haben, ist ihre *Eindeutigkeit.* Im Unterschied zur gewöhnlichen Zeilen-Stufen-Form, ergeben zwei Rechnungen, die mit verschiedenen Wahlen von Pivot-Elementen zur kanonischen Zeilen-Stufen-Form führen, nicht nur gleiche Stufenzahl l (die Anzahl der unabhängigen Gleichungen), sondern auch gleiche Matrixeinträge in gleichen Positionen der kanonischen Zeilen-Stufen-Form — vorausgesetzt man hat in beiden Rechnungen am Ende dieselbe Zuordnung der Unbekannten zu den Koeffizientenspalten. (Wenn man die Spalten in der Reihenfolge der Nummerierung der Unbekannten anordnet, also überhaupt keine Spaltenvertauschungen vornimmt, so erhält man also unabhängig von den ausgeführten Zeilenoperationen dieselbe Zeilen-Stufen-Matrix mit kanonischen Basisvektoren in den Spalten der Basisvariablen, vorausgesetzt man hat dieselben Unbekannten als Basisvariablen gewählt.)

Ein anderer Vorteil der kanonischen Zeilen-Stufen-Form ist, dass sie im Fall von unendlich vielen Lösungen eine spezielle Parametrisierung der Lösungsmenge liefert, in der die Nicht-Basisvariablen die Parameter sind. Hat man $x_1, \ldots, x_l$ als Basisvariable, so lautet für $h = 1 \ldots l$ die h-te Gleichung in kanonischer Form $x_h + c_{h\,l+1}x_{l+1} + \ldots + c_{hn}x_n = d_h$. Wenn man also die Nicht-Basisvariablen als Parameter r_k wählt, so erhält man die *spezielle lineare Parametrisierung der Lösungsmenge* mit der kleinstmöglichen Zahl von $n-l$ Parametern:

$$\begin{aligned} x_h &= d_h - c_{h\,l+1}r_1 - \ldots - c_{hn}r_{n-l} \quad \text{für} \quad h = 1 \ldots l\,, \\ x_k &= r_{k-l} \quad \text{für } k = l+1 \ldots n\,. \end{aligned}$$

Hier sind die d_h und die Koeffizienten c_{hj} aus der kanonischen Zeilen-Stufen-Form der erweiterten Koeffizientenmatrix des gegebenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu entnehmen. Wenn nicht die ersten l Unbekannten die Basisvariablen sind, sondern die Unbekannten $x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}$ mit $1 \le j_1 < \ldots < j_l \le n$, so ändert sich nur an der Nummerierung etwas: Statt x_h hat man oben x_{j_h} zu schreiben und statt x_k dann x_{j_k}, wobei $1 \le j_{l+1} < \ldots < j_n \le n$ die Nummern der Nicht-Basisvariablen sind.

3) Der **Austausch einer Basisvariablen gegen eine Nicht-Basisvariable** ist möglich, wenn die Koeffizienten für beide Unbekannten in einer Zeile des Gleichungssystems in kanonischer Zeilen-Stufen-Form von Null verschieden sind (d.h. in der Zeile des Systems, die den Koeffizienten 1 für die Basisvariable hat, ist auch der Koeffizient vor der Nicht-Basisvariablen $\neq 0$). Ist das in der h-ten Zeile der Fall und etwa i die Spaltennummer der Basisvariablen, also $c_{hi} = 1$, und j die Spaltennummer einer Nicht-Basisvariablen mit Koeffizient $c_{hj} \neq 0$, so kann man offenbar durch Zeilenoperationen die j-te Spalte in den kanonischen Basisvektor e_h verwandeln, wobei die anderen kanonischen Basisspalten, außer der mit Nummer i, nicht verändert werden. Vertauscht man dann noch die i-te mit der j-ten Spalte, so hat man wieder die kanonische Zeilen-Stufen-Form, wobei allerdings jetzt die vorher der Spaltennummer j zugeordnete Nicht-Basisvariable zur Basisvariablen-Spalte Nummer i gehört.

4) Im Fall eines Systems von n linear unabhängigen Gleichungen für n Unbekannte hat die kanonische Zeilen-Stufen-Form die Gestalt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & 0 & & d_1 \\ & 1 & & & d_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & 1 & d_n \end{array}\right)$$

mit der sog. $\boldsymbol{n \times n}$**–Einheitsmatrix** $\mathbb{I}_n$ als Koeffizientenmatrix, das ist die quadratische $n{\times}n$–Matrix mit Einträgen 1 auf der Diagonalen und Nulleinträgen überall sonst. Diese Form des Gleichungssystems ist dann ohne Spaltenvertauschungen alleine durch Zeilenoperationen herzustellen, d.h. die Unbekannten x_j sind den Spalten der Einheitsmatrix in der Reihenfolge ihrer ursprünglichen Nummerierung zugeordnet. Die eindeutig bestimmte Lösung des Systems ist dann natürlich einfach die Spalte der rechten Seiten, die sich ergeben hat, also $x_1 = d_1$, $x_2 = d_2, \ldots, x_n = d_n$. Ähnlich ist es bei $m > n$ Gleichungen für n Unbekannte, wenn davon n linear unabhängig sind und der Konsistenzfall vorliegt. Die erweiterte Zeilen-Stufen-Matrix hat dann die obige Form mit $m{-}n$ zusätzlichen Nullzeilen darunter. ■

BEISPIELE (*zur kanonischen Zeilen-Stufen-Form*):

1)
$$\begin{array}{rrl} 3x & -2y & + \; z = 2 \\ x & & -2z = 3 \end{array}$$

Dieses Beispiel haben wir schon früher bei den Beispielen zur gewöhnlichen Zeilen-Stufen-Form behandelt.

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \quad \underset{\textcircled{1} \to \textcircled{1} - 3\cdot\textcircled{2}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 7 & -7 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \quad \underset{\substack{\textcircled{1} \to -\frac{1}{2}\cdot\textcircled{1} \\ \textcircled{1} \leftrightarrow \textcircled{2}}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}$$

Damit ist die kanonische Zeilen-Stufen-Form ohne Spaltenvertauschungen erreicht, und die 1-parametrige Lösungsdarstellung $x = 3+2t$, $y = \frac{7}{2}(t+1)$, $z = t$ ablesbar. Wir können aber auch anders vorgehen:

$$\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \quad \underset{\substack{\textcircled{2} \to -\frac{1}{2}\textcircled{2} \\ \textcircled{1} \to -\frac{1}{2}\textcircled{1} + \frac{1}{2}\textcircled{2}}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|r} x & y & z & \\ \hline -\frac{7}{4} & 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrr|r} y & z & x & \\ \hline 1 & 0 & -\frac{7}{4} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

Dies ist eine andere kanonische Zeilen-Stufen-Form desselben Gleichungssystems — widerspricht das nicht der behaupteten Eindeutigkeit der kanonischen Zeilen-Stufen-Form?!

Nein, weil die Zuordnung der Unbekannten zu den Spalten hier eine andere ist. Jetzt ist x die Nicht-Basisvariable, und wir erhalten die Parameterdarstellung $x = r$, $y = \frac{7}{4}(r-1)$, $z = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}$. Da der Koeffizient von x in der obersten Zeile nicht verschwindet, kann man auch y zur Nicht-Basisvariablen machen und erhält die Parameterdarstellung der Lösung $x = \frac{4}{7}s+1$, $y = s$, $z = \frac{2}{7}s-1$. Jede andere Wahl von Zeilenoperationen und Spaltenvertauschungen, um eine kanonische Zeilen-Stufen-Form zu erzielen, führt auf eine dieser drei Parameterdarstellungen der Lösungsmenge und bei gegebener Zuordnung der Unbekannten zu den Spalten zu derselben kanonischen Zeilen-Stufen-Matrix!

2) Bei
$$\begin{array}{rrrl} 3x & -2y & +\ z & = 2 \\ -1.5 & +y & -.5z & = b \end{array}$$

soll in Abhängigkeit vom Parameter $b \in \mathbb{R}$ die Lösbarkeit diskutiert und die Lösungsmenge bestimmt werden. Hier rechnen wir

$$\begin{array}{rrr|l} 3 & -2 & 1 & 2 \\ -1.5 & 1 & -0.5 & b \\ \hline \end{array} \quad \underset{②\to②+\frac{1}{2}①}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rrr|l} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \\ \hline \end{array} ,$$

die beiden Gleichungen sind also linear abhängig (im Nachhinein sieht man jetzt natürlich, dass die untere Koeffizientenzeile aus der oberen durch Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$ hervorgeht). Durch Multiplikation der ersten Zeile mit $\frac{1}{3}$ oder $-\frac{1}{2}$ nebst Spaltenvertauschungen erreichen wir die kanonischen Zeilen-Stufen-Formen

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \\ \hline \end{array} , \qquad \begin{array}{ccc|c} y & x & z & \\ \hline 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \\ \hline \end{array} , \qquad \begin{array}{ccc|c} z & y & x & \\ \hline 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 \\ \hline \end{array} .$$

Nur für $b = -1$ existiert eine Lösung, und dann ist die Lösungsmenge eine 2-dimensionale lineare Schar, wobei wir hier zwei beliebige der drei Unbekannten als Parameter wählen können, z.B. $x = r$, $y = s$, $z = -3r + 2s + 2$.

3) Bei
$$\begin{array}{rrr|r} x & y & z & \\ \hline 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$
hatten wir früher schon
$$\begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$
als eine Zeilen-Stufen-Form berechnet. Hier subtrahieren wir nun das 2-fache der dritten von der ersten Zeile, addieren die dritte zur zweiten Zeile und multiplizieren die erste Zeile noch mit -1, die zweite mit $\frac{1}{2}$, um die kanonische Zeilen-Stufen-Form zu erhalten (die zweite ergibt sich aus der ersten durch Spalten und Zeilenvertauschung):

$$\begin{array}{ccc|c} z & y & x & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline \end{array} ,$$

woraus man die eindeutige Lösung $x = 2$, $y = 0$, $z = 4$ unmittelbar abliest. Die Koeffizientenmatrix in der kanonischen Zeilen-Stufen-Form ist hier die Einheitsmatrix, und das ist immer so, wenn man n unabhängige lineare Gleichungen für n Unbekannte hat.

4) Bei
$$\begin{array}{rrr|r} x & y & z & \\ \hline 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$
hatten wir früher schon
$$\begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$
als eine Zeilen-Stufen-Form erhalten. Nach Multiplikation der ersten Zeile mit -1 hat man schon eine kanonische Zeilen-Stufen-Form:

$$\begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\ .$$

Hier ist die Zahl der unabhängigen Gleichungen $l = 2$, daher hat die Koeffizientenmatrix eine Nullzeile. Weil aber auch der Eintrag auf der rechten Seite dieser Zeile Null ist, gibt es Lösungen. Man erhält alle, indem man x als Parameter wählt, in der Form $x = r$, $y = r-2$, $z = 2r$ aus der mittleren und oberen Gleichung. Da die Koeffizienten von x in der ersten und zweiten Zeile $\neq 0$ sind, kann man auch y oder z als Parameter wählen: $x = s+2$, $y = s$, $z = 2s+4$ beziehungsweise $x = \frac{1}{2}t$, $y = \frac{1}{2}t-2$, $z = t$. Wäre die kanonische Zeilen-Stufen-Form z.B.

$$\begin{array}{rrr|r} z & y & x & \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}\ ,$$

so könnte man nur x oder z als Nicht-Basisvariable (Parameter) wählen, da die Koeffizienten von x und z in der zweiten Zeile Null sind. Die zweite Gleichung $y = -2$ bestimmt ja auch y eindeutig, so dass y nicht beliebige Werte annehmen kann.

5) Bei
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$
mit Koeffizientenmatrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
erreichen wir durch Addition der ersten zur dritten Zeile und Subtraktion des Doppelten der ersten von der zweiten Zeile zunächst einen kanonischen Basisvektor in der ersten Spalte (die rechten Seiten bei diesem homogenen Gleichungssystem sind alle Null und werden nicht notiert):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ein weiterer, davon verschiedener, kanonischer Basisvektor kann jetzt nur in der dritten oder vierten Spalte erzeugt werden. Mit Subtraktion der dritten von der vierten und des Dreifachen der dritten von der zweiten Zeile und mit anschließender Division der zweiten Zeile durch -6 und Subtraktion der entstehenden Zeile von der dritten erreichen wir leicht die folgende kanonische Zeilen-Stufen-Form der Koeffizientenmatrix:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \iff \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Dies ist eine kanonische Zeilen-Stufen-Form mit $l = 3$ unabhängigen Gleichungen. Die zugehörige Nullspalte der rechten Seiten haben wir nicht notiert. Um die 1-dimensionale Lösungsmenge zu parametrisieren, kann man x_2 oder, weil der Koeffizient von x_2 in der ersten Zeile nicht Null ist, x_1 als Parameter wählen, nicht aber x_3 oder x_4. Die eine Parametrisierung der Lösungen ist dann $x_1 = -2s$, $x_2 = s$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ und die andere $x_1 = r$, $x_2 = -\frac{1}{2}r$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Da x_3 und x_4 hier nur Basisvariable sein können, ist die Herstellung der kanonischen Zeilen-Stufen-Form mit den drei ersten kanonischen Einheitsvektoren als vorderen Spalten nicht ohne Spaltenvertauschung möglich. (Das wollten wir mit diesem Beispiel zeigen. Die Lösungen kann man ohne Rechnung schon aus der Koeffizientenmatrix oben mit kanonischer erster Spalte direkt erkennen, weil die zweite und dritte Gleichung offenbar nur von $x_3 = 0$ und $x_4 = 0$ gelöst werden.) ■

BEMERKUNGEN: 1) Es versteht sich, dass man bei der Herstellung der kanonischen Zeilen-Stufen-Form *bereits in der Koeffizientenmatrix vorhandene Nulleinträge zur Vereinfachung der Rechnungen ausnutzt,* indem man die Spalten, in denen kanonische Basisvektoren erzeugt werden sollen, so aussucht, dass sie schon viele Nulleinträge haben.

2) Das letzte Beispiel zeigt, dass man aus den n Unbekannten nicht einfach $n-l$ beliebige als Nicht-Basisvariable herausgreifen kann, wenn l die Zahl der unabhängigen Gleichungen des linearen Gleichungssystems ist. An der kanonischen Zeilen-Stufen-Form sieht man:

- *Genau dann sind $n-l$ herausgegriffene Unbekannte als Nicht-Basisvariable wählbar, also als Parameter in einer linearen Parametrisierung der Lösungsmenge im Konsistenzfall, wenn durch Zeilenoperationen l verschiedene kanonische Einheitsvektoren in den Spalten zu den anderen Unbekannten herstellbar sind.*

Leider kann man der ursprünglichen Koeffizientenmatrix meist nicht direkt ansehen, wieviele Nicht-Basisvariablen es gibt und welche der Unbekannten man dafür wählen kann, sondern das ergibt sich erst im Verlauf der Berechnung einer kanonischen Zeilen-Stufen-Form, wenn nämlich erkennbar wird, dass gewisse Spalten nur in den bereits verwendeten Pivot-Zeilen Einträge $\neq 0$ haben und somit für die Erzeugung neuer kanonischer Basisvektoren nicht mehr in Frage kommen. ■

DISKUSSION (*lineare Gleichungssysteme und Spaltenoperationen*):

1) **(Zulässige) Spaltenoperationen** mit einer Matrix werden natürlich ganz analog zu den Zeilenoperationen erklärt: Vertauschung von zwei Spalten, Multiplikation einer Spalte mit einer reellen Zahl $\neq 0$ (d.h. Multiplikation aller Einträge mit dieser Zahl), Addition einer Spalte zu einer anderen (d.h. Addition der Einträge einer gegebenen Spalte zu denen mit gleicher Position in einer anderen gegebenen Spalte) und Kombinationen davon. Bei Zeilenoperationen mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ eines Gleichungssystems $Ax = b$ bleibt, wie wir gesehen haben, die Lösungsmenge L erhalten. Hier gilt nun:

- *Bei zulässigen Spaltenoperationen mit der Koeffizientenmatrix bleibt die Menge Z der konsistenten rechten Seiten im zugehörigen Gleichungssystem erhalten.*

Wenn also $y \in \mathbb{R}^m$ zulässig ist, d.h. wenn $Ax = y$ eine Lösung hat, und wenn $\widetilde{A}$ aus A durch Spaltenoperationen hervorgeht, so hat auch $\widetilde{A}\widetilde{x} = y$ eine Lösung $\widetilde{x}$ und umgekehrt. Das braucht man nur für die elementaren Spaltenoperationen zu überprüfen: Bei Vertauschung zweier Spalten erhält man aus x die Lösung $\widetilde{x}$ einfach durch entsprechende Vertauschung der Komponenten von $x \in \mathbb{R}^n$, bei Multiplikation der j-ten Spalte mit $r \neq 0$ erhält man $\widetilde{x}$ durch Multiplikation der j-ten Komponente x_j mit $\frac{1}{r}$ und bei Addition der j-ten zur k-ten Spalte erhält man $\widetilde{x}$, indem man bei x die k-te von der j-ten Komponente subtrahiert.

2) Um Informationen über die Menge der konsistenten rechten Seiten $y \in \mathbb{R}^m$ zu einer $m \times n$–Matrix A zu gewinnen, können wir also A mit Spaltenoperationen beliebig umformen und auf eine einfache Gestalt bringen. Erreichbar ist z.B. wie bei Zeilentransformationen eine **Spalten-Stufen-Form** und, wenn man noch Zeilenvertauschungen zulässt (das verändert Z nur so, dass bei allen Vektoren in Z die Komponenten entsprechend vertauscht werden), sogar die **kanonische Spalten-Stufen-Form** der $m \times n$–Matrix A:

$$\begin{array}{rc}
\begin{matrix} k\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right. \\ m-k\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right.\end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{matrix} & \qquad 0 \qquad \\ \hline & \\ * & 0 \\ & \end{array}\right) \\
 & \underbrace{\hspace{6em}}_{k}\ \underbrace{\hspace{6em}}_{n-k}
\end{array}$$

Hier ist die ganze Zahl $0 \leq k \leq \min(m, n)$ eindeutig durch A bestimmt und heißt der **Spaltenrang** der Matrix; seine Bedeutung ist die **(maximale) Anzahl der linear unabhängigen Spalten**, ganz analog zum früher eingeführten Zeilenrang l von A.

3) Aus der kanonischen Spalten-Stufen-Form C erhalten wir nun sofort eine Parametrisierung der Menge Z der konsistenten rechten Seiten $y \in \mathbb{R}^m$, indem wir die ersten k Komponenten als Parameter $y_1 = r_1, \ldots, y_k = r_k$ wählen, das legt dann auch die ersten k Komponenten $x_1 = r_1, \ldots, x_k = r_k$ der Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ zu $Cx = y$ fest, und y ist zulässig, genau wenn die restlichen Komponenten von y durch $y_i = c_{i1}r_1 + \ldots + c_{ik}r_k$ gegeben sind. Das ist eine *spezielle k-parametrige lineare Parametrisierung von Z* und k ist hier die kleinstmögliche Parameterzahl. Gleichzeitig erhält man auch ein System von $m-k$ unabhängigen linearen Gleichungen $y_i = c_{i1}y_1 + \ldots + c_{ik}y_k$, $k < i \leq m$, dessen Lösungsmenge Z ist. (Wenn zur Herstellung der kanonischen Zeilen-Stufen-Form Zeilenvertauschungen durchgeführt wurden, so ändert das nur die Nummerierung der Komponenten.)

4) Nun haben wir aber schon früher gesehen, dass die Menge Z der konsistenten rechten Seiten zu einer $m \times n$–Matrix A eine l-dimensionale lineare Menge ist, wobei l der Zeilenrang von A ist. Lineare Parametrisierungen von Z haben also die minimale Parameterzahl l, und durch Vergleich mit 3) folgt $k = l$, d.h. wir haben folgendeses fundamentale Ergebnis der Linearen Algebra:

- *Für jede Matrix A gilt:* **Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A)** .

Diese ganze Zahl nennt man dann einfach den **Rang der Matrix**.

5) Eine beliebige homogene lineare Parametrisierung einer Teilmenge Z von $\mathbb{R}^m$ mit n Parametern kann man immer als Beschreibung von Z als Menge der konsistenten rechten Seiten eines Gleichungssystems $Ax = y$ von m Gleichungen für n Unbekannte auffassen ($x_1, \ldots, x_n$ sind hier die Parameter). Aus 3) ergibt sich dann, dass dieselbe Menge Z auch mit der minimalen Zahl k von Parametern beschrieben werden kann, wenn k der (Spalten-)Rang von A ist, und dass man ein System von $m-k$ unabhängigen homogenen linearen Gleichungen angeben kann, dessen Lösungsmenge Z ist. Es folgt (mit n statt m) die **äquivalente Beschreibung k–dimensionaler affiner Unterräume E von $\mathbb{R}^n$**:

- *E lässt sich affin-linear mit k Parametern parametrisieren, aber nicht mit weniger;*
- *E ist Lösungsmenge eines konsistenten Systems von $n-k$ unabhängigen, aber nicht eines Systems von mehr oder weniger unabhängigen, linearen Gleichungen.* ■