3.4 Inverse Matrix und Determinante

In diesem Abschnitt behandeln wir nur *quadratische* Matrizen (von einigen Nebenbemerkungen abgesehen). Zur Motivation der Inversenbildung bei Matrizen betrachten wir ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = y$$

mit Koeffizientenmatrix $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Inhomogenität $y \in \mathbb{R}^n$, also ein System mit ebenso vielen Gleichungen wie Unbekannten $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Angenommen wir kennen eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$BA = \mathbb{I} \qquad \text{und} \qquad AB = \mathbb{I}\,,$$

wobei $\mathbb{I}$ die $n\times n$–Einheitsmatrix ist. Dann folgt aus $BA = \mathbb{I}$ durch Multiplikation der Gleichung $y = Ax$ von links mit B die Gleichung $By = B(Ax) = (BA)x = \mathbb{I}x = x$, also kann nur $x = By$ die Lösung unseres Gleichungssystems sein. Dies heißt noch nicht, dass $x = By$ wirklich Lösung ist, aber das folgt aus $AB = \mathbb{I}$ mit $Ax = A(By) = (AB)y = \mathbb{I}y = y$. Also ist tatsächlich für jede rechte Seite $y \in \mathbb{R}^n$

$$x = By \quad \text{die eindeutige Lösung des Gleichungssystems} \quad Ax = y\,.$$

Das ist sehr praktisch; denn man kann dann die Lösung für jede rechte Seite y durch eine einfache Matrix–an–Vektor–Multiplikation ausrechnen, nämlich durch Bildung des Produkts By, und das ist im Allgemeinen viel einfacher als die Lösung des Gleichungssystems mit dem Eliminationsverfahren (Herstellung der Zeilen-Stufen-Form). Es klappt freilich nur, wenn wir auch eine Matrix B mit $BA = \mathbb{I} = AB$ kennen, und daher machen wir erst einmal eine

DEFINITION: Eine quadratische Matrix A heißt **invertierbare Matrix** oder **reguläre Matrix**, wenn es eine gleichformatige Matrix B gibt mit $BA = \mathbb{I} = AB$. Dann heißt B die zu A **inverse Matrix** und wird A^{-1} notiert. Ist A nicht invertierbar, so heißt A auch **singuläre Matrix**. ∎

Man darf von *der* inversen Matrix sprechen, weil es nur eine einzige geben kann; denn aus $BA = \mathbb{I}$ und $A\widetilde{B} = \mathbb{I}$ folgt die Gleichheit $B = B\mathbb{I} = B(A\widetilde{B}) = (BA)\widetilde{B} = \mathbb{I}\widetilde{B} = \widetilde{B}$. Die Notation A^{-1} für die Inverse ist sinnvoll, weil dann gilt $A^{-1}A^1 = A^0 = A^1A^{-1}$ wie bei einem Potenzgesetz (wobei $A^1 := A$ und $A^0 := \mathbb{I}$ gesetzt ist).

DISKUSSION: **1)** Die Bedeutung der inversen Matrix für die Lösung linearer Gleichungssysteme haben wir vor der Definition schon gesehen:

- *Ist die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems $Ax = y$ von n Gleichungen für n Unbekannte unvertierbar, so ist $x = A^{-1}y$ die eindeutige Lösung.*

Insbesondere liegt der "gute" Fall der eindeutigen Lösbarkeit für jede rechte Seite vor, wenn eine Inverse zur Koeffizientenmatrix existiert. Und man erhält die Lösung durch eine einfache Matrix–an–Vektor–Multiplikation, wenn man die inverse Matrix A^{-1} kennt.

2) *Nur quadratische Matrizen können eine Inverse haben*; denn wenn $BA = \mathbb{I} = AB$ ist, so sind die Produkte AB und BA beide definiert und von gleichem Format, und das geht nur, wenn A, B gleichformatige quadratische Matrizen sind. Aber natürlich ist nicht *jede* quadratische Matrix A invertierbar!

3) Bei quadratischen Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genügt es, *eine* der beiden Gleichungen $AB = \mathbb{I}$ bzw. $BA = \mathbb{I}$ nachzuweisen; dann folgt schon die jeweils andere Gleichung, und B ist die Inverse zu A. Ist z.B. $BA = \mathbb{I}$, so hat das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung $x = \mathbb{I}x = (BA)x = B(Ax) = B0 = 0$. Dann aber wissen wir aus 3.2, weil wir gleich viele Gleichungen und Unbekannte haben, dass das Gleichungssystem $Ax = y$ für jede rechte Seite $y \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar ist, und wegen $x = \mathbb{I}x = (BA)x = B(Ax) = By$ muss $x = By$ diese eindeutige Lösung sein, d.h. es gilt auch $(AB)y = A(By) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ und damit $AB = \mathbb{I}$. Ist andererseits $AB = \mathbb{I}$ so wenden wir das Argument auf B statt A an und erhalten auch $BA = \mathbb{I}$.

4) Die inverse Matrix entspricht dem **linearen Umkehroperator** zu einem linearen Operator $T : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^n$. Dass T eine Umkehrabbildung T^{-1} besitzt, heißt ja, dass es zu jedem $y \in \mathbb{R}^n$ genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $T(x) = y$, und dann ist $T^{-1}(y) = x$. Besitzt A eine inverse Matrix A^{-1}, so ist $x = A^{-1}y$ die eindeutige Lösung zu $T(x) = Ax = y$, also existiert die Umkehrabbildung und ist durch $T^{-1}(y) = A^{-1}y$ gegeben. Ist andererseits T^{-1} Umkehrabbildung zu T, so ist T^{-1} auch wieder linear (denn $T^{-1}(sy) = sT^{-1}(y)$ gilt, weil $T(sx) = sy$ ist, und $T^{-1}(y+\widetilde{y}) = T^{-1}(y)+T^{-1}(\widetilde{y})$ gilt, weil $T(x+\widetilde{x}) = y+\widetilde{y}$ ist, wenn $T(x) = y$ und $T(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$). Also wird T^{-1} durch eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt, $T^{-1}(y) = By$ für alle y. Das aber heißt $BAx = T^{-1}(Ax) = T^{-1}(T(x)) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, also ist $BA = \mathbb{I}_n$ und B inverse Matrix zu A.

- *Eine inverse Matrix zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert genau dann, wenn der durch A dargestellte lineare Operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ umkehrbar ist; der inverse lineare Operator T^{-1} wird dann durch die inverse Matrix A^{-1} dargestellt.*

5) Rechenregeln für die Inversenbildung: Die invertierbaren $n\times n$–Matrizen bilden eine Gruppe, d.h. mit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind auch A^{-1}, AB invertierbar. Außerdem sind mit A auch die transponierte Matrix A^T und Vielfache rA mit $r \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ invertierbar. Es gilt:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}, \quad (rA)^{-1} = \tfrac{1}{r}A^{-1} \ (r \neq 0);$$

die Inverse der inversen Matrix ist also die Ausgangsmatrix, die Inverse eines Matrixprodukts ist das Produkt der inversen Faktoren, aber *in umgekehrter Reihenfolge* (!), das Inverse der transponierten Matrix ist die Transponierte der Inversen. Die erste Regel besagt $AA^{-1} = \mathbb{I}$ und $A^{-1}A = \mathbb{I}$ und ist klar ebenso wie die letzte. Die zweite folgt aus $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\mathbb{I}B = B^{-1}B = \mathbb{I}$. Die dritte beruht auf

$$(BA)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T}B^\mathsf{T},$$

was man sich leicht überlegt. (Der Eintrag des letzten Produkts in Position (i,j) ist das Skalarprodukt der i-ten Spalte von A mit der j-ten Zeile von B, weil ja die Spalten der transponierten Matrix die Zeilen der ursprünglichen Matrix sind und die Zeilen der transponierten Matrix die Spalten der ursprünglichen. Dieses Skalarprodukt ist aber gerade der Eintrag von BA in Position (j,i), also der von $(BA)^\mathsf{T}$ in Position (i,j).) Da offenbar $\mathbb{I}^\mathsf{T} = \mathbb{I}$ ist, folgt daraus $(A^{-1})^\mathsf{T}A^\mathsf{T} = (AA^{-1})^\mathsf{T} = \mathbb{I}^\mathsf{T} = \mathbb{I}$.

6) *Matrixpotenzen mit ganzen Exponenten* A^k erklärt man für $k \in \mathbb{N}$ durch Multiplikation von k Matrixfaktoren A und, wenn A invertierbare Matrix ist, für $k = -l \in \mathbb{Z}_{<0}$ durch Multiplikation von l Matrixfaktoren A^{-1}; für $k = 0$ wird noch $A^0 := \mathbb{I}$ gesetzt. Es gelten dann die üblichen Potenzgesetze

$$A^kA^l = A^{k+l}, \qquad (A^k)^l = A^{kl} \qquad \text{für alle } k, l \in \mathbb{Z},$$

aber $(AB)^k = A^k B^k$ ist im Allgemeinen nicht richtig, wenn $AB \neq BA$ ist; für $k = -1$ gilt sogar $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ gerade mit der umgekehrten Reihenfolge der Faktoren rechts. Eine *Division von Matrizen ist nicht erklärt*, selbst wenn beide quadratisch sind und der Nenner A invertierbar ist. Das Problem ist, dass man hier zwei mögliche Definitionen $A^{-1}B$ und BA^{-1} des Quotienten "$\frac{B}{A}$" hat, die im Allgemeinen verschiedene Ergebnisse liefern, und dass für keine der beiden Definitionen vernünftige Rechenregeln gelten, die man von einer Quotientenbildung fordern würde. Zum Beispiel sollte $A\frac{B}{A} = B = \frac{B}{A}A$ gelten, aber $ABA^{-1} = B$ bzw. $A^{-1}BA = B$ stimmt nur, wenn $AB = BA$ ist, und die Matrixmultiplikation bei $n{\times}n$–Matrizen ist ja (für $n \geq 2$) nicht kommutativ.

7) Für allgemeine $m{\times}n$–Matrizen A heißt $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine **Linksinverse**, wenn $BA = \mathbb{I}_n$ ist, und $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine **Rechtsinverse** wenn $AC = \mathbb{I}_m$ ist. Existiert eine Linksinverse B zu A, so ist das Gleichungssystem $Ax = 0$ nur trivial lösbar, weil $x = \mathbb{I}_n x = (BA)x = B(Ax) = B0 = 0$ folgt; also muss gemäß 3.2 dann $m \geq n$ sein (mindestens so viele homogene Gleichungen wie Unbekannte). Existiert aber eine Rechtsinverse C, so gilt $A(Cy) = (AC)y = \mathbb{I}_m y = y$, d.h. das Gleichungssystem $Ax = y$ hat für jede rechte Seite $y \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung $x = Cy$; gemäß 3.2 muss dann $m \leq n$ sein (höchstens so viele Gleichungen wie Unbekannte). Im Fall $m < n$ ist außerdem eine Rechtsinverse C — wenn eine existiert — nicht eindeutig bestimmt, weil man beliebige Lösungen $x \neq 0$ von $Ax = 0$ zu den Spalten von C addieren kann, ohne an der Gleichung $AC = \mathbb{I}_m$ etwas zu ändern. Entsprechend ist im Fall $m > n$ eine Linksinverse B nie eindeutig — wenn eine existiert —, weil man zu den Zeilen von B Lösungen $x \neq 0$ des homogenen Gleichungssystems $zA = 0$ von n linearen Gleichungen für m Unbekannte $z = (z_1 \ \ldots \ z_m)$ addieren kann, ohne an der Gleichung $BA = \mathbb{I}_n$ etwas zu ändern. Nur im quadratischen Fall $m = n$ kann es also Rechtsinverse und Linksinverse zugleich geben, und dann zeigt 3), dass jede Rechtsinverse und jede Linksinverse automatisch schon die eindeutige beidseitige Inverse ist.

8) Eine linksinverse Matrix zu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kann man als Lösung $X = B$ der Matrixgleichung $XA = \mathbb{I}_n$ auffassen, eine rechtsinverse Matrix entsprechend als Lösung $X = C$ der Matrixgleichung $AX = \mathbb{I}_m$. Für allgemeine *lineare Matrixgleichungen* $XA = R$ bzw. $AX = S$ folgt, dass $X = RC$ bzw. $X = BS$ die Lösung sein muss, wenn es eine gibt. Ist A invertierbar und sind R, S quadratische Matrizen vom gleichen Format wie A, so hat $XA = R$ die eindeutige Lösung $X = RA^{-1}$ und $AX = S$ die eindeutige Lösung $X = A^{-1}S$. ■

FRAGEN, die sich nun aufdrängen, sind:

1) Wie sieht man, ob eine gegebene (quadratische!) Matrix A invertierbar ist?

2) Wie berechnet man dann die Inverse A^{-1} ?

Die Antwort auf beide Fragen liegt, wie wir sehen werden, in der *Herstellung der Zeilen-Stufen-Form* der Matrix mit Zeilentransformationen, und zwar genügt für die Beantwortung der ersten Frage eine gewöhnliche Zeilen-Stufen-Form, während man zur Berechnung der inversen Matrix noch weitere Zeilentransformationen durchführen muss bis zur kanonischen Zeilen-Stufen-Form, welche bei invertierbaren Matrizen nichts anderes als die Einheitsmatrix ist. ■

Im folgenden Satz geben wir verschiedene Kriterien für die Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix an und beschreiben die Berechung der Inversen genauer:

SATZ: 1) (Kriterien für Invertierbarkeit)
Für eine quadratische $n\times n$–Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *A ist regulär, d.h. die Inverse A^{-1} existiert;*

(ii) *das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung;*

(iii) *das Gleichungssystem $Ax = y$ hat für jede rechte Seite $y \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung;*

(iv) *der Rang von A ist maximal, also gleich n;*

(v) *A hat als Zeilen-Stufen-Form eine $n\times n$–Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\neq 0$;*

(vi) *A hat als kanonische Zeilen-Stufen-Form die Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$.*

2) (Berechnung der Inversen) *Ist A invertierbar, so erhält man die j-te Spalte von A^{-1} als Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = e_j$ mit dem j-ten kanonischen Basisvektor e_j von $\mathbb{R}^n$ als rechte Seite ($j = 1\ldots n$). Man erhält die Inverse A^{-1} auch, indem man die Zeilenoperationen, die von A zur kanonischen Zeilen-Stufen-Form (vi) führen, in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ anwendet.*

Die Äquivalenz von (ii), (iii), (iv) und (v) für Systeme von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten wissen wir schon aus 3.2. Aus einer Zeilen-Stufen-Form wie in (v) kann man offenbar durch weitere Zeilentransformationen die Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ erzeugen, daher ist (v) auch äquivalent zu (vi). Wir haben auch schon gesehen, dass die Existenz der inversen Matrix (i) gleichbedeutend ist mit der Umkehrbarkeit des linearen Operators $x \mapsto Ax$ auf $\mathbb{R}^n$, also mit der eindeutigen Lösbarkeit (ii),(iii) von $Ax = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Damit ist Teil 1) des Satzes schon klar. Für Teil 2) erinnern wir uns, dass $A^{-1}e_j$ die j-te Spalte der Matrix A^{-1} ist. Andererseits gilt $A(A^{-1}e_j) = e_j$, also ist $A^{-1}e_j$ auch die Lösung zu $Ax = e_j$. Wenn man die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|y)$ durch Zeilenoperationen in die Form $(\mathbb{I}_n|z)$ umgeformt hat, so ist z die Lösung zu $Ax = y \iff \mathbb{I}_n x = z$. Daher ergibt die Anwendung dieser Zeilenoperationen auf e_j die j-te Spalte von A^{-1}, und die Anwendung auf $\mathbb{I}_n$, also auf die Matrix mit den Spalten $e_1, \ldots, e_n$, gibt die Inverse A^{-1}.

DISKUSSION: 1) Aus dem Satz ergibt sich ein **Verfahren zur Feststellung der Invertierbarkeit und zur Berechnung der Inversen:** Man formt die aus A als linker Block und der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ als rechter Block zusammengesetzte $n\times 2n$–Matrix $(A|\,\mathbb{I}_n) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$ durch Zeilenoperationen so um, dass A auf Zeilen-Stufen-Form gebracht wird. Falls sich dabei eine Nullzeile in der linken $n\times n$–Matrix ergibt, so hat A kleineren Zeilenrang als n, also existiert die Inverse nicht. Ergibt sich aber links eine Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\neq 0$, so erzeugt man mit weiteren Zeilenoperationen in der $n\times 2n$ –Matrix links die Einheitsmatrix I_n und erhält als rechten $n\times n$–Block die Inverse $B = A^{-1}$.

$$A = (a_{ij}) \qquad \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \ \text{Zeilenoperationen} \ \Big\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right) \qquad (b_{ij}) = A^{-1}$$

Spaltenoperationen sind verboten bei diesem Berechnungsverfahren für die Inverse Matrix, auch Spaltenvertauschungen! Solche Operationen sind auch nicht erforderlich; denn die Zeilen-Stufen-Form von A kann man alleine mit Zeilenoperationen herstellen, und wenn sie keine Nullzeile hat, also hier eine Dreiecksmatrix ohne Nulleinträge auf der Diagonalen ist, so kann man mit weiteren Zeilenoperationen auch die Einheitsmatrix erreichen. Man kann das Verfahren auch verstehen, indem man die Zeilenoperationen durch Multiplikation von links mit entsprechenden Elementarmatrizen darstellt (siehe 3.3). Die Herstellung der Einheitsmatrix $\mathbb{I}$ aus A durch Zeilenoperationen bedeutet demnach, dass es ein Produkt E von Elementarmatrizen gibt mit $EA = \mathbb{I}$. Dann ist $A^{-1} = E = E\mathbb{I}$, d.h. man erhält A^{-1}, indem man dieselben Zeilenoperationen in gleicher Reihenfolge auf die Einheitsmatrix anwendet. Hat man aber auch Spaltenoperationen bei A durchgeführt, um die Einheitsmatrix zu erhalten, so heißt das $EAF = \mathbb{I}$ mit einem weiteren Produkt F von Elementarmatrizen. Daraus folgt dann $E = F^{-1}A^{-1}$ und $A^{-1} = FE = FE\mathbb{I}$, d.h. man muss nach den durch E bestimmten Zeilenoperationen an der Einheitsmatrix noch weitere, durch Multiplikation mit F von links gegebene, Zeilenoperationen ausführen, um A^{-1} zu erhalten.

2) Kennt man die Inverse zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so kann man die eindeutige Lösung eines lineares Gleichungssystems $Ax = b$ einfach berechnen, indem man A^{-1} an den Spaltenvektor b multipliziert. Das ist sicher weniger aufwendig, als das Gaußsche Eliminationsverfahren. Andererseits ist die Berechnung von A^{-1} aufwendig: Man hat dazu n lineare Gleichungssysteme $Ax = e_j$, $j = 1\dots n$, zu lösen. Die Frage ist also: *Wann lohnt sich der Aufwand für die Berechnung von A^{-1}, wenn es um die Lösung vieler linearer Gleichungssysteme $Ax = b$ mit derselben Koeffizientenmatrix A geht?*

Die simultane Lösung von $Ax = \mathbf{b}_j$ für k verschiedene rechte Spalten $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ mit dem Rechenschema aus 1) erfordert $\frac{1}{2}n(n+2k-1)$ Divisionen und $\frac{1}{2}n(n-1)(n+2k-1)$ Multiplikationen sowie $\frac{1}{2}n(n-1)(n+2k-1)$ Additionen im ungünstigsten Fall. (Man kann die erforderlichen Operationen zur Herstellung eines kanonischen Einheitsvektors in Spalte j zählen und mit der arithmetischen Summenformel für $j = 1\dots n$ aufaddieren. Gibt man sich mit einer Dreiecksform zufrieden und löst die Gleichungssysteme dann von unten nach oben auf, so genügen $\frac{1}{6}n(n-1)(2n+6k-1)$ Multiplikationen und Additionen / Subtraktionen, das ist etwas weniger.) Kennt man die Inverse, so hat man für die Berechnung von k Produkten $A^{-1}\mathbf{b}_j$ offenbar kn^2 Multiplikationen und $kn(n-1)$ Additionen auszuführen. Der Aufwand für die Berechnung von A^{-1} ist nicht größer als der bei n Gleichungssystemen, erfordert also nicht mehr als $\frac{1}{2}n(3n-1)$ Divisionen und $\frac{1}{2}n(n-1)(3n-1)$ Additionen sowie $\frac{1}{2}n(n-1)(3n-1)$ Multiplikationen. Da die Division eine viel aufwendigere Rechenoperation ist als Multiplikation und Addition, erkennt man:

- *Sind mehrere lineare Gleichungssysteme $Ax = \mathbf{b}_j$ mit derselben invertierbaren Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zu lösen, so lohnt sich der Aufwand für die Berechnung der Inversen A^{-1} und der Lösungen als Matrixprodukt $A^{-1}\mathbf{b}_j$, wenn die Anzahl der zu lösenden Gleichungssysteme deutlich größer als n ist.*

Eine genauere Aussage darüber, ab welcher Zahl k von zu lösenden Gleichungssystemen sich die Inversenberechnung lohnt, ist nur möglich, wenn man quantitativ festlegt, wieviele Multiplikationen dem Rechenaufwand einer Division entsprechen. Werden (nicht realistisch) Divisionen und Multiplikationen als gleich aufwendig angesetzt, so kommt man auf eine Zahl $k \approx n^2$ erheblich größer als n. Je aufwendiger Divisionen im Verhältnis zu Multiplikationen tatsächlich sind, desto kleiner wird die Zahl $k \geq n$ von Gleichungssystemen, ab der sich die Lösungsberechnung mit Hilfe der inversen Matrix lohnt.

3) Kriterien für die Existenz von einseitigen Inversen zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kann man analog zum letzten Satz herleiten. Hat A eine Rechtsinverse C, also $AC = \mathbb{I}_m$, so ist $Ax = y$ für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ lösbar, da man eine Lösung sofort in der Form $x = Cy$ angeben kann. Ist umgekehrt $Ax = y$ für alle y lösbar, so kann man aus Lösungen $x = \mathbf{c}_i$ von $Ax = e_i$ zu den kanonischen Basisvektoren e_i von $\mathbb{R}^m$ eine Matrix $C = (\mathbf{c}_1 \ \dots \ \mathbf{c}_m) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ spaltenweise zusammenstellen und erhält $AC = \mathbb{I}_m$. Aus 3.2 wissen wir, dass Lösbarkeit von $Ax = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^m$ genau dann gegeben ist, wenn A den Rang m hat (Zeilenrang oder Spaltenrang — am Ende von 3.2 haben wir ja gesehen, dass diese Ränge gleich sind). Für den linearen Operator $T(x) = Ax$ von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist gleichbedeutend, dass T *surjektiv* ist, d.h. zu jedem $y \in \mathbb{R}^m$ gibt es (mindestens) ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $T(x) = y$. Wir fassen zusammen:

- *$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzt genau dann eine Rechtsinverse C, d.h. $AC = \mathbb{I}_m$, wenn das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ für jede rechte Seite $y \in \mathbb{R}^m$ lösbar ist, bzw. äquivalent, wenn Rang$(A) = m$ ist. (Dies ist nur im Fall $m \le n$ möglich.)*

Analog verläuft die Diskussion für Linksinverse $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ zu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Gilt $BA = \mathbb{I}_n$, so hat $Ax = 0$ nur die triviale Lösung, weil ja $x = BAx = B0 = 0$ folgt. Aus 3.2 wissen wir, dass dies genau im Fall Rang$(A) = n$ so ist. Für den linearen Operator $T(x) = Ax$ ist gleichbedeutend, dass er *injektiv* ist, d.h. $T(x) = T(\widetilde{x})$ gilt nur im Fall $x = \widetilde{x}$ (bzw. $T(x) = 0$ nur für $x = 0$; das ist äquivalent wegen $T(x) - T(\widetilde{x}) = T(x - \widetilde{x})$). Hat umgekehrt A den Rang n, so auch die transponierte Matrix $A^\top$ (weil Zeilenrang gleich Spaltenrang ist), also besitzt $A^\top x = e_j$ Lösungen $x = \mathbf{c}_j \in \mathbb{R}^m$ für jeden kanonischen Basisvektor e_j von $\mathbb{R}^n$. Stellen wir die $\mathbf{c}_j$ wieder zu einer $m\times n$–Matrix C zusammen, so folgt $A^\top C = \mathbb{I}_n$ und für $B := C^\top$ dann $BA = C^\top A = (A^\top C)^\top = \mathbb{I}_n^\top = \mathbb{I}_n$, also ist B Linksinverse zu A. Wir fassen zusammen:

- *$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ besitzt genau dann eine Linksinverse B, d.h. $BA = \mathbb{I}_n$, wenn das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung hat, bzw. äquivalent, wenn Rang$(A) = n$ ist. (Dies ist nur im Fall $m \ge n$ möglich.)* ∎

BEISPIELE (*zur Berechnung von inversen Matrizen*):

1) Die *Inverse zu einer* 1×1*– Matrix* (a) existiert genau dann, wenn der (einzige) Eintrag a nicht Null ist, und dann ist $A^{-1} = (\frac{1}{a})$.

2) Die *Inverse zu einer* 2×2*-Matrix* $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ existiert genau dann, wenn ihre Determinante $ad - bc$ von Null verschieden ist. In 3.1 haben wir nämlich schon gesehen, dass genau dann das Gleichungssystem $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right)$ für alle rechten Seiten eindeutig lösbar ist. Die Lösung haben wir auch berechnet zu $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} dr-bs \\ as-cr \end{smallmatrix}\right)$. Die Spalten der inversen Matrix erhalten wir, wenn wir für $\left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right)$ die kanonischen Basisvektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ einsetzen. Das Ergebnis ist:

- *Die Inverse A^{-1} zu einer 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ existiert genau dann, wenn ihre Determinante $ad - bc$ von Null verschieden ist, und dann gilt*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}\,.$$

Man erhält also die inverse Matrix, indem man in der Ausgangsmatrix die Diagonaleinträge vertauscht, die anderen Einträge mit -1 multipliziert und schließlich noch alle Einträge durch die Determinante der Ausgangsmatrix dividiert. Der letzte Schritt ist nur ausführbar, wenn die Determinante $\neq 0$ ist; sonst existiert die Inverse ja auch gar nicht.

Konkret ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{1\cdot 3 - 2\cdot(-2)} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 \\ 2/7 & 1/7 \end{pmatrix}$,

aber $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$ existiert nicht, weil die Determinante $1\cdot(-4) - 2\cdot(-2) = 0$ ist.

3) Wir wenden das Schema zur Berechnung von A^{-1} an auf $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \quad (2) \to (2) - 2\cdot(1), \quad (3) \to (3) - (1)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \quad (3) \to (3) - 2\cdot(2), \quad (3) \to (-1)(3), \quad (2) \leftrightarrow (3)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \quad (1) \to (1) - 4\cdot(2), \quad (3) \to (3) + 3\cdot(2)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 13 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \quad (1) \to (1) + (3), \quad (2) \to (2) - (3)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & 7 & -3 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Um jetzt z.B. das Gleichungssystem $Ax = b$ für die rechte Seite $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ zu lösen, rechnen wir einfach

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad x = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 8 & -5 & 2 \\ -11 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Das hätten wir mit dem Eliminationsverfahren (Herstellung der Zeilen-Stufen-Form) natürlich schneller haben können. Der Vorteil ist jetzt aber, dass wir für jede andere rechte Seite $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ \frac{2}{2} \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \pi \\ \sqrt{2} \\ e \end{smallmatrix}\right)$, ... die Lösung nun genau so einfach durch Multiplikation mit der nun explizit bekannten Matrix A^{-1} von links erhalten.

4) Das Verfahren zur Inversenberechnung führt natürlich nicht immer zum Ziel; denn wenn keine Inverse existiert, so kann man auch keine berechnen — mit welchem Verfahren auch immer. Man erkennt diese Situation aber "auf dem Wege", ohne dass vorher die Existenz der Inversen überprüft werden muss. Ein konkretes Beispiel dazu:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Die ausgeführten Zeilenoperationen sind hier leicht zu erkennen. Da in der Diagonalen des linken 3×3–Dreieck-Blocks der letzten Matrix ein Nulleintrag auftritt, existiert die Inverse zu der Matrix A (der linke 3×3–Block der ersten Matrix) nicht. Das hätte man nach dem ersten Schritt schon sehen können: Da zwei gleiche Zeilen in der Koeffizientenmatrix entstanden sind, hat A höchstens zwei unabhängige Zeilen und somit kann der Rang nicht 3 sein, wie es bei invertierbaren 3×3–Matrizen der Fall ist.

5) Die **Inverse einer Diagonalmatrix** existiert genau dann, wenn alle Diagonaleinträge $\neq 0$ sind, und dann ergibt sich die inverse Matrix einfach, indem man alle Diagonaleinträge durch ihr Reziprokes ersetzt. (*Warnung*: Das geht *nur* bei Diagonalmatrizen so!)

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & d_n \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & & \\ & 1/d_2 & & \text{\Large 0} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 1/d_n \end{pmatrix} \qquad \text{wenn alle } d_i \neq 0\,.$$

Da bei der Multiplikation zweier Diagonalmatrizen die Diagonaleinträge in gleichen Positionen miteinander multipliziert werden, ist klar, dass das Produkt der rechten mit der linken Diagonalmatrix die Einheitsmatrix ist. Ein Spezialfall ist das *Inverse einer skalaren Matrix* $D = d\mathbb{I}$, also einer Diagonalmatrix mit lauter gleichen Diagonaleinträgen d. Ist $d \neq 0$, so ist die skalare Matrix $\frac{1}{d}\mathbb{I}$ die Inverse. Aus den Rechenregeln für die Matrixmultiplikation ist ja auch klar, dass $(\frac{1}{d}\mathbb{I})(d\mathbb{I}) = \frac{1}{d}d\,\mathbb{I}\mathbb{I} = \mathbb{I}$ ist. Die Einheitsmatrix $\mathbb{I}$ ist ihre eigene Inverse, $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$, und das gilt auch für ihr Negatives, $(-\mathbb{I})^{-1} = -\mathbb{I}$. (Es gibt noch andere Matrizen, die ihre eigene Inverse sind; siehe 8) unten.)

6) Die **Inverse einer Dreiecksmatrix** A existiert genau dann, wenn alle ihre Diagonaleinträge $\neq 0$ sind. Eine obere $n \times n$–Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ (also $a_{ij} = 0$ für $i > j$) hat nämlich schon Zeilen–Stufen–Form, und genau wenn $a_{ii} \neq 0$ gilt für alle i, so ist ihr Rang gleich n, also A^{-1} existent. Man kann dann die kanonische Zeilen–Stufen–Form leicht herstellen, und das Verfahren zur Berechnung der Inversen mit Zeilenoperationen zeigt, dass A^{-1} ebenfalls obere Dreiecksmatrix ist, wobei auf der Diagonalen von A^{-1} die Reziproken der Diagonaleinträge von A stehen. Für obere Dreiecksmatrizen gilt also schematisch:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \text{\Large $*$} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & & & \\ & 1/a_{22} & & \widetilde{\text{\Large $*$}} \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 1/a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \text{wenn alle } a_{ii} \neq 0\,,$$

wobei "$*$" für irgendwelche Einträge oberhalb der Diagonalen in A steht und "$\widetilde{*}$" für irgendwelche (im Allgemeinen anderen) Einträge oberhalb der Diagonalen von A^{-1}. Es gibt auch eine allgemeine Formel dafür, wie man die Einträge in "$\widetilde{*}$" aus den Einträgen von A berechnet (dazu siehe auch 10) unten). Wir diskutieren diese Formel hier aber nicht, weil sie komplizierter ist als das Verfahren zur Inversenberechnung mit Zeilenoperationen.

Für untere Dreiecksmatrizen B ist der Sachverhalt übrigens völlig analog; die Inverse existiert, genau wenn keine Diagonaleinträge b_{ii} von B Null sind, und dann ist B^{-1} ebenfalls eine untere Dreiecksmatrix und hat Diagonaleinträge $1/b_{ii}$. Das kann man analog überlegen oder durch Übergang zu der transponierten (oberen) Dreiecksmatrix $A := B^\top$ zeigen.

7) Die **Inversen von Elementarmatrizen sind wieder Elementarmatrizen**, und genauer gilt (mit den Bezeichnungen aus 3.3):

$$M_i(r)^{-1} = M_i(1/r)\,, \qquad A_{ij}(s)^{-1} = A_{ij}(-s)\,, \qquad V_{ij}^{-1} = V_{ij}\,.$$

Das ist sofort klar, wenn man die Elementarmatrizen als lineare Operatoren auffasst, die durch Multiplikation von links auf passende Spaltenvektoren x wirken. $M_i(r)$ ist die Diagonalmatrix mit Eintrag $r \neq 0$ in i-ter Diagonalposition und Einträgen 1 auf der Diagonalen sonst, und der entsprechende Operator wirkt auf x, indem die i-te Komponente von x mit dem Faktor r multipliziert wird. Dann ist natürlich $M_i(1/r)$ die Matrix des Umkehroperators, der die i-te Komponente mit $1/r$ multipliziert und so den ursprünglichen Spaltenvektor wieder herstellt. $A_{ij}(s)$ entsteht aus der Einheitsmatrix durch Ersetzung des Nulleintrags in Position (i,j) mit $i \neq j$ durch den Eintrag $s \in \mathbb{R}$ und wirkt auf Spaltenvektoren x, indem das s-fache der j-ten Komponente zur i-ten Komponente von x addiert wird. Um diese Operation rückgängig zu machen, muss man offenbar das s-fache der j-ten von der i-ten Komponente subtrahieren, also ist $A_{ij}(-s)$ die Matrix des Umkehroperators. V_{ij} entsteht aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen der i-ten mit der j-ten Zeile für $i \neq j$, und Multiplikation von V_{ij} an x bewirkt eine Vertauschung der i-ten mit der j-ten Komponente von x. Wenn man diese Operation noch einmal anwendet, so erhält man also wieder x, und daher ist V_{ij} seine eigene Inverse.

Das Schema zur Inversenberechnung mit Zeilenoperationen ist übrigens nichts anderes als folgende Beobachtung: Wenn $E_1, \ldots, E_k$ Elementarmatrizen sind mit $E_k \cdots E_2 E_1 A = \mathbb{I}$ (d.h. man hat A durch Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix umgeformt), so erhält man durch Multiplikation mit A^{-1} von rechts $E_k \cdots E_2 E_1 \mathbb{I} = A^{-1}$ (d.h. die Anwendung derselben Zeilenoperationen auf die Einheitsmatrix gibt die Inverse).

8) Eine **involutorische Matrix** A ist eine mit $A^2 = \mathbb{I}$, d.h. die Matrix *ist ihre eigene Inverse*, $A = A^{-1}$. Da bei Zahlen nur 1 und -1 ihre eigenen multiplikativen Inversen sind, könnte man zunächst denken, dass nur $\mathbb{I}_n$, und $-\mathbb{I}_n$ involutorische $n \times n$–Matrizen sind. Es gibt aber sehr viel mehr. Involutorische 2×2-Matrizen sind zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

und allgemeiner

$$\begin{pmatrix} 0 & r \\ 1/r & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } ad - bc = -1 \text{ und } a + d = 0\,.$$

(Diese Beispiele erfassen tatsächlich *alle* involutorischen 2×2–Matrizen.) Eine $n \times n$–Diagonalmatrix D ist involutorisch, genau wenn alle Diagonaleinträge ± 1 sind. Jede zu D *ähnliche Matrix*, d.h. jede Matrix der Form $C^{-1}DC$ mit invertierbarer $n \times n$–Matrix C, ist dann auch involutorisch; denn es gilt ja

$$(C^{-1}DC)^2 = C^{-1}DCC^{-1}DC = C^{-1}D\mathbb{I}_n DC = C^{-1}D^2C = C^{-1}DC\,.$$

Man kann beweisen, dass *jede* involutorische Matrix von dieser Form $C^{-1}DC$ ist mit Diagonaleinträgen ± 1 in der Diagonalmatrix D. Geometrisch betrachtet ist der zu D gehörige lineare Operator auf $\mathbb{R}^n$ eine *Achsenpiegelung*. (Die den Diagonaleinträgen $+1$ entsprechenden Achsen bleiben fest, die anderen werden am Ursprung gespiegelt.) $C^{-1}DC$ kann dann als Achsenspiegelung bzgl. eines allgemeinen (nicht unbedingt orthogonalen) Achsensystems in $\mathbb{R}^n$ interpretiert werden. In diesem Sinne entsprechen die involutorischen Matrizen A den Spiegelungen, und $A^2 = \mathbb{I}$ beschreibt die charakteristischen Eigenschaft von Spiegelungen, dass man bei zweifacher Anwendung wieder das Original erhält.

9) Involutorische Matrizen A erfüllen $A^2 = \mathbb{I}$; sie sind also gewissermaßen Quadratwurzeln aus der Einheitsmatrix. Man kann fragen, ob es auch k–te Wurzeln A aus der Einheitsmatrix gibt für beliebige $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, d.h. $A^k = \mathbb{I}$. Wegen $A^{k-1}A = A^k$ ist äquivqlent, dass die Inverse von A gleich der $(k-1)$–ten Potenz von A ist, $A^{-1} = A^{k-1}$. Noch allgemeiner kann man nach der Existenz von **k–ten Wurzeln A aus einer gegebenen quadratischen Matrix** B fragen, d.h. nach Matrizen A mit $A^k = B$.

Bei beliebigen quadratischen Matrizen B ist die Antwort im Allgemeinen nein. Z.B. hat $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ keine Quadratwurzel A. Wäre nämlich $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine, so gälte $AB = AA^2 = A^3 = A^2A = BA$ und A müsste Diagonalmatrix sein; denn Multiplikation mit B von rechts ersetzt die zweite Spalte in A durch ihr Negatives, aber Multiplikation von B mit links ersetzt die zweite Zeile in A durch ihr Negatives. Eine Diagonalmatrix kann aber nicht B als Quadrat haben, weil -1 keine Quadratwurzel in $\mathbb{R}$ hat.

Die Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ hat dagegen für jedes $k \geq 2$ viele k–te Wurzeln, wenn $n > 1$ ist. Für $n = 2$ kann man z.B. die Matrix $D_{2\pi/k}$ der Drehung um den Ursprung mit Drehwinkel $\frac{2}{k}\pi = \frac{1}{k}\cdot 360°$ nehmen; deren k–te Potenz entspricht dann der Drehung um einen Vollwinkel, die jeden Punkt festlässt, d.h. $(D_{2\pi/k})^k$ ist die 2×2–Einheitsmatrix. Diese *Drehmatrix* ist

$$D_{2\pi/k} = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{k} & -\sin\frac{2\pi}{k} \\ \sin\frac{2\pi}{k} & \cos\frac{2\pi}{k} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (D_{2\pi/k})^k = \mathbb{I}_2\,, \quad (D_{2\pi/k})^{-1} = (D_{2\pi/k})^{k-1} = D_{-2\pi/k}\,.$$

Das kann man mit Hilfe von Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen nachrechnen, es ist aber aufgrund der geometrischen Beschreibung unmittelbar klar. Für $n > 2$ erhält man k–te Wurzeln aus $\mathbb{I}_n$, indem man eine "Block-Diagonalmatrix" aus m 2×2–Diagonalblöcken $D_{2\pi/k}$ und aus $n-2m$ Blöcken (1) des Formats 1×1 zusammenstellt. Weitere k–te Wurzeln findet man mit folgender Überlegung: Ist $A^k = B$ und C irgendeine invertierbare Matrix desselben Formats wie A, so ist $C^{-1}AC$ eine k-te Wurzel aus $C^{-1}BC$; denn

$$\begin{aligned}(C^{-1}AC)^k &= \underbrace{(C^{-1}AC)(C^{-1}AC)\cdots(C^{-1}AC)}_{k} \\ &= C^{-1}\underbrace{A(CC^{-1})A(CC^{-1})\cdots A(CC^{-1})}_{k}C \\ &= C^{-1}\underbrace{A\mathbb{I}A\mathbb{I}\cdots A\mathbb{I}}_{k}C \;=\; C^{-1}A^kC = C^{-1}BC\,.\end{aligned}$$

Speziell im Fall $B = \mathbb{I}_n$ gilt $C^{-1}\mathbb{I}_nC = C^{-1}C = \mathbb{I}_n$ also ist mit A auch jede zu A ähnliche Matrix $C^{-1}AC$ eine k–te Wurzel aus der Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$. Wenn $A \neq \pm\,\mathbb{I}_n$ ist, so bekommt man durch Variation von C auf diese Weise eine unendliche Schar von k–ten Wurzeln $C^{-1}AC$ aus $\mathbb{I}_n$.

10) Eine **nilpotente Matrix** ist eine quadratische Matrix N ungleich der Nullmatrix 0 mit $N^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Für den kleinsten derartigen Exponenten k heißt $k-1$ der *Nilpotenzgrad* von N. Eine nilpotente Matrix ist selbst nie invertierbar, aber es gilt die Formel für die **Inverse einer nilpotenten Störung der Einheitsmatrix** $\mathbb{I} - N$:

- *$\mathbb{I} - N$ ist stets invertierbar, wenn N nilpotent ist, und zwar ist die Inverse gleich*
$$(I-N)^{-1} = \mathbb{I} + N + N^2 + \ldots + N^{k-1}, \quad \textit{wenn} \quad N^k = 0 \quad \textit{ist.}$$

Das bestätigt man einfach durch Multiplikation mit $\mathbb{I} - N$:

$$\begin{aligned}&(\mathbb{I} - N)(\mathbb{I} + N + N^2 + \ldots + N^{k-1})\\ =\ &(\mathbb{I} + N + N^2 + \ldots + N^{k-1}) - (N + N^2 + N^3 + \ldots + N^k) = \mathbb{I} - N^k = \mathbb{I}.\end{aligned}$$

Typische nilpotente Matrizen sind *Dreiecksmatrizen A mit lauter Nulleinträgen auf der Diagonalen.* Im Fall einer oberen $n \times n$–Dreiecksmatrix z.B. kann man dann nachrechnen, dass A^2 auch Nulleinträge in der ersten Oberdiagonalen hat, d.h. in den Positionen $(i, i{+}1)$, und A^3 auch Nulleinträge in den beiden ersten Oberdiagonalen, also in den Positionen $(i, i{+}1)$ und $(i, i{+}2)$ usw. Die Potenz A^n hat dann Nulleinträge in allen Positionen, also ist A nilpotent mit Nilpotenzgrad $\leq n{-}1$. Konkretes Beispiel:

$$N = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{n} \quad N^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{n} \quad N^{n-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{n}$$

Bei Erhöhung des Exponenten um 1 rückt die Schrägzeile mit Einträgen 1 jeweils um eine Stufe nach oben, und N^n ist dann die $n \times n$–Nullmatrix, also ist N nilpotent mit Nilpotenzgrad $n{-}1$. Für die Inverse von $\mathbb{I}_n - N$ gilt dann gemäß der obigen Inversionsformel für nilpotente Störungen der Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (\mathbb{I}{-}N)^{-1} = \mathbb{I}{+}N{+}N^2{+}\ldots{+}N^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix rechts auf und über der Diagonalen Einträge 1 hat und darunter 0.

Eine allgemeine invertierbare Dreiecksmatrix A kann man immer in der Form $A = D(\mathbb{I}{-}N)$ schreiben, wobei D die Diagonalmatrix mit denselben Diagonaleinträgen wie A ist und N die Einträge $-a_{ij}/a_{ii}$ in Positionen (i,j) mit $i < j$ hat sowie Nulleinträge in allen anderen Positionen. Dann ist N nilpotent mit Nilpotenzgrad höchstens $n{-}1$, und wir erhalten folgende **Formel für die Invertierung von Dreiecksmatrizen** mit Diagonaleinträgen $\neq 0$:

$$A^{-1} = [D(\mathbb{I} - N)]^{-1} = (\mathbb{I} - N)^{-1} D^{-1} = (\mathbb{I} + N + N^2 + \ldots + N^{n-1}) D^{-1},$$

Diese Formel für die Inversen von Dreiecksmatrizen ist, weil man man die Inverse der Diagonalmatrix D nach 5) einfach berechnen kann und sonst nur Matrixadditionen und Multiplikationen auszuführen hat, auch zur praktischen Berechnung von A^{-1} geeignet. ■

Das letzte Beispiel mit der Formel $(\mathbb{I}-A)^{-1} = \mathbb{I} + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$, wenn $A^k = 0$, erinnert an die geometrische Reihe $(1-a)^{-1} = \frac{1}{1-a} = a + a + a^2 + a^3 + \ldots$ für Zahlen a mit $|a| < 1$. Wir fragen uns daher, ob man nicht auch mit quadratischen $n\times n$–Matrizen A die Matrix-Reihe

$$\mathbb{I} + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

erklären kann, wenigstens wenn A in einem passenden Sinne "Betrag" < 1 hat, und ob man dann, wenn dies gelungen ist, vielleicht nachweisen kann, dass die Reihe die inverse Matrix zu $\mathbb{I}-A$ ist. Immerhin stimmt das ja im Fall von nilpotenten Matrizen A, wo die Reihe ab einem gewissen Index mit lauter Nullmatrizen als Gliedern abbricht, so dass man nur endlich viele Summanden zu addieren hat. Tatsächlich funktioniert diese zunächst spekulativ erscheinende Idee, und sie hat auch ökonomische Anwendungen, weil z.B. Matrizen der Form $\mathbb{I}-A$ (mit "kleiner" Matrix A) bei Produktion mit Verflechtung und bei Input-Output-Modellen auftreten und solche der Form $D-A = (\mathbb{I}-AD^{-1})D$ (mit invertierbarer Diagonalmatrix D und "kleiner" Matrix AD^{-1}) bei der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung (siehe 3.2 und 3.3). Deshalb geben wir hier für Interessierte einen Einblick in diese mathematische Theorie, der über den Rahmen der Vorlesung hinausführt.

DISKUSSION (*Neumannsche Reihe und invers positive Matrizen*):

1) Eine *formale Potenzreihe quadratischer Matrizen* ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = c_0\mathbb{I} + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + \ldots$$

mit Koeffizieneten $c_k \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (In der Mathematik werden auch komplexe Zahlen als Koeffizienten und quadratische Matrizen mit komplexen Einträgen zugelassen.) "Formal" heißt die Reihe, weil sie eigentlich nur eine Absichtserklärung ist; denn man kann natürlich nicht unendlich viele quadratische Matrizen addieren. Was man aber bilden kann, ist für jedes $l \in \mathbb{N}$ die *l-te Partialsumme* $S_l := \sum_{k=0}^{l} c_k A^k \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir sagen, dass *die Potenzreihe gegen die $n\times n$–Matrix B konvergiert* und schreiben

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = B \quad \text{oder} \quad c_0\mathbb{I} + c_1 A + c_2 A^2 + c_3 A^3 + \ldots = B\,,$$

wenn für jede gegebene Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ ein $l_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass die Einträge aller Partialsummenmatrizen S_l mit $l \geq l_0$ um weniger als ε von den Einträgen von B in gleicher Position abweichen. Man kann nachweisen, dass Konvergenz der Matrixreihe gegen eine eindeutig bestimmte Matrix B vorliegt, wenn z.B. die Einträge der Matrizen $c_1 A$, $c_2 A^2$, $c_3 A^3$, ... dem Betrage nach mindestens so schnell klein werden wie eine geometrische Folge q, q^2, q^3, ... mit $0 \leq q < 1$, d.h. wenn es eine Konstante K gibt, so dass alle Einträge von $c_k A^k$ Betrag $\leq Kq^k$ haben für $k = 1, 2, 3, \ldots$. Mit konvergenten Matrixreihen darf man wie mit Reihen von reellen Zahlen rechnen — bei Rechnungen, die Matrixmultiplikationen beinhalten, allerdings nur, wenn die Matrixfaktoren A, C miteinander vertauschbar sind, d.h. $AC = CA$ (was ja im Allgemeinen für $A, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nicht der Fall ist).

2) Das Matrix-Analogon zur geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ ist die **Neumannsche Reihe**

$$\mathbb{I} + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}),$$

also die Matrix-Potenzreihe, bei der alle Koeffizienten 1 sind. Und analog zu der Formel $\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$ für den Wert der geometrischen Reihe, wenn sie konvergiert (was genau für $|a| < 1$ der Fall ist), gilt hier tatsächlich:

- *Wenn die Neumannsche Reihe* $\mathbb{I} + A + A^2 + A^3 + \dots$ *zu* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *konvergent ist, so ist* $\mathbb{I}-A$ *invertierbar und die Reihe konvergiert gegen die Inverse*

$$(\mathbb{I} - A)^{-1} = \mathbb{I} + A + A^2 + A^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k .$$

Der Beweis hierfür verläuft wie bei der geometrischen Reihe: $(\mathbb{I}-A)(\mathbb{I} + A + A^2 + \dots) = \mathbb{I} + A + A^2 + \dots - A - A^2 - A^3 - \dots = \mathbb{I}$, und wenn die Matrix-Reihe konvergiert, so darf man so rechnen.

3) Die Frage ist nun, für welche quadratischen Matrizen A die Neumannsche Reihe konvergiert. Dazu müssen wir irgendwie die Größe der Einträge von A beschränken. Das kann man am besten tun durch Einführung einer *Norm* $\|A\|$ auf dem Matrizen-Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$, d.h. eine Art Betragsfunktion mit $\|A\| \geq 0$ und $\|A\| = 0$ nur für die Nullmatrix A, mit $\|rA\| = |r|\|A\|$ für Skalare $r \in \mathbb{R}$, und mit der sog. *Dreiecksungleichung* $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, was auch als *Subadditivität* der Norm bezeichnet wird. Wenn die Norm zusätzlich noch *submultiplikativ* ist, d.h. wenn $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ erfüllt ist für das Matrix-Produkt von $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt:

- *Die Neumannsche Reihe* $\mathbb{I} + A + A^2 + A^3 + \dots$ *konvergiert, wenn* $\|A\| < 1$ *ist;*

denn für $q := \|A\| < 1$ hat man $\|A^k\| \leq q^k$ wegen der Submultiplikativität, und man kann zeigen, dass es dann eine Konstante K gibt, so dass alle Einträge von A^k Betrag $\leq Kq^k$ haben, woraus die Konvergenz (wie in 1) bemerkt) folgt.

4) Brauchbare Normen auf dem Matrizen-Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\infty,\infty} &:= \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| && \textit{Maximum der Zeilenbetragssummen},\\
\|A\|_{1,1} &:= \sum_{i=1}^{n} \max_{j=1}^{n} |a_{ij}| && \textit{Summe der Zeilenbetragsmaxima},\\
\|A\|_{2} &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} && \textit{Euklidische Norm},\\
\|A\| &:= \sup\{|Ax| \,:\, x \in \mathbb{R}^n,\ |x| = 1\} && \textit{Operator-Norm},
\end{aligned}$$

Die Euklidische Norm einer Matrix ist dabei ganz analog zur Euklidischen Norm $|x|$ von Vektoren in $x \in \mathbb{R}^n$ als die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate aller Einträge definiert. Die Operator-Norm $\|A\|$ ist die maximale Länge, die das Bild eines Einheitsvektors $x \in \mathbb{R}^n$ unter dem durch A beschriebenen linearen Operator auf $\mathbb{R}^n$ haben kann, und gleichzeitig die kleinstmögliche Dehnungsschranke für diesen Operator, d.h. die kleinste Zahl L mit $|A\tilde{x} - Ax| \leq L|\tilde{x} - x|$ für alle $\tilde{x}, x \in \mathbb{R}^n$. Die Operator-Norm beschreibt also die maximale Längendehnung (wenn $\|A\| \geq 1$) bzw. die minimale Längenstauchung (wenn $\|A\| \leq 1$) von Vektoren in $\mathbb{R}^n$ unter diesem linearen Operator. Man kann für die vier hier definierten Größenmessungen von Matrizen (mit einigem Aufwand) die Normeigenschaften nachrechnen und auch die Submultiplikativität dieser Normen beweisen. Es gilt daher:

- *Die Neumannsche Reihe* $\mathbb{I}+A+A^2+\ldots$ *von* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *konvergiert gegen* $(\mathbb{I}-A)^{-1}$, *wenn das Maximum der Zeilenbetragssummen oder die Summe der Zeilenbetragsmaxima oder die Euklidische Norm oder die Operator-Norm von* A *kleiner als 1 ist.*

In dieser Feststellung kann man übrigens "Zeilen" ohne weiteres durch "Spalten" ersetzen, wenn man die Rechenregel $(\mathbb{I}-A^\top)^{-1} = ((\mathbb{I}-A)^\top)^{-1} = ((\mathbb{I}-A)^{-1})^\top$ für die Inversion transponierter Matrizen berücksichtigt und überlegt, dass $\mathbb{I}+A^\top+(A^\top)^2+(A^\top)^3+\ldots$ gegen $B^\top$ konvergiert, wenn $\mathbb{I}+A+A^2+A^3+\ldots = B$ ist, und umgekehrt.

5) Eine $m\times n$–Matrix B heißt **positive Matrix** (bzw. **nichtnegative Matrix**), wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $x_j > 0$ auch $y = Bx$ lauter positive (bzw. nichtnegative) Komponenten hat. Und B heißt **invers positive Matrix** (bzw. **invers nichtnegative Matrix**), wenn für alle $y \in \mathbb{R}^m$ mit Komponenten $y_i > 0$ das Gleichungssystem $Bx = y$ nur Lösungsvektoren $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt, die lauter positive (bzw. nichtnegative) Komponenten haben. Man überlegt dann leicht:

- *B nichtnegative Matrix* $\iff$ *alle Einträge von B sind* ≥ 0;
  B positive Matrix $\iff$ *alle Einträge von B sind* ≥ 0 *und B hat keine Nullzeile;*
- *B invers positiv (bzw. invers nichtnegativ)* $\iff$ B^{-1} *positiv (bzw. nichtnegativ), vorausgesetzt die Inverse* B^{-1} *existiert;*
- *B kann nur dann invers nichtnegativ sein, wenn* $Bx = 0$ *nur die triviale Lösung hat, also* $\operatorname{Rang}(B) = n \geq m$ *ist*

Letzteres ist klar, weil anderenfalls gewisse Komponenten der Lösung frei als Parameter, also auch negativ, wählbar sind.

Von ökonomischer Bedeutung sind diese Begriffsbildungen, weil man bei ökonomischen Vektorvariablen $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ sehr oft die Nebenbedingung hat, dass alle Komponenten positiv oder wenigstens nichtnegativ sind, da negative Werte der Komponenten sinnlos sind. Ist x z.B. ein Produktionsvektor, dessen Komponenten produzierte Mengeneinheiten mehrerer Produkte oder eines Produkts an mehreren Produktionsstätten angeben, so muss natürlich $x_j \geq 0$ sein für alle j. Ist y ein zugehöriger Rohstoffverbrauchsvektor und wird ein linearer Zusammenhang $y = Rx$ modelliert, so sind nur nichtnegative Verflechtungsmatrizen R sinnvoll, weil es ja keinen negativen Rohstoffverbrauch gibt. Ist andererseits y ein Produktions-Outputvektor für den Verkauf und x der dazu erforderliche Produktionsvektor, der auch einen internen Verbrauch der erzeugten Produkte im Produktionsprozess berücksichtigt (endogener Input), so hat man zu gegebenem y den Produktionsvektor x aus einem linearen Gleichungssystem $Bx = y$ zu bestimmen, für das nur invers nichtnegative Matrizen B sinnvoll sind; denn negative Produktionsmengen (Rückgewinnung der Rohstoffe aus den Endprodukten) werden ja nicht hergestellt.

6) Die Positivität einer Matrix ist nach 5) mit einem Blick auf ihre Einträge zu erkennen. Schwieriger, für ökonomische Anwendungen aber auch wichtiger, ist die Feststellung der inversen Positivität. Hier hilft folgende Beobachtung:

- *Ist* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *nichtnegativ und die Neumannsche Reihe* $\mathbb{I}+A+A^2+A^3+\ldots = (\mathbb{I}-A)^{-1}$ *konvergent, so ist* $\mathbb{I}-A$ *invers positiv, also* $(\mathbb{I}-A)^{-1}$ *positiv.*

Das liegt daran, dass mit A offenbar auch A^2, A^3, ... lauter nichtnegative Einträge hat; daher haben die Partialsummen-Matrizen $S_l = \mathbb{I}+A+A^2+\ldots+A^l$ ebenfalls nichtnegative Einträge und auf der Diagonalen sogar Einträge ≥ 1. Dasselbe gilt dann auch für den Grenzwert $(\mathbb{I}-A)^{-1}$ und hat zur Folge, dass $(\mathbb{I}-A)^{-1}y$ nur positive Komponenten hat, wenn dies für y der Fall ist.

7) Wir geben noch ein direktes Argument dafür an, dass $\mathbb{I}-A$ invers positiv ist, wenn eine der in 4) betrachteten Normen von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kleiner als 1 ist. Das Argument ist zwar weniger durchsichtig als 6), aber es benutzt keine unendliche Matrix-Reihe. Wir nehmen dazu an, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ für die Euklidischen Normen von x und Ax gilt:

$$|Ax| \leq \kappa |x| \qquad \text{mit einer Konstanten } \kappa < 1 .$$

Wenn die Operator-Norm $\|A\| < 1$ ist, so gilt das mit $\kappa := \|A\|$, und wenn die Euklidische Norm $\|A\|_2 < 1$ ist, so gilt es erst recht, weil man $\|A\| \leq \|A\|_2$ zeigen kann.

Wir zerlegen nun jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ in der Form $x = x_+ + x_-$, wobei x_+ dieselben Einträge wie x hat in Positionen, in denen diese nichtnegativ sind, und Nulleinträge sonst, während x_- dieselben negativen Komponenten wie x hat und Nulleinträge sonst. Ist A nichtnegativ, so gilt $Ax = Ax_+ + Ax_-$, wobei Ax_+ nur nichtnegative Komponenten besitzt und Ax_- nur nichtpositive. Die negativen Komponenten von Ax haben daher keinen größeren Betrag als die entsprechenden Komponenten von Ax_- und es folgt $|(Ax)_-| \leq |Ax_-|$. Ist nun $(\mathbb{I}-A)x = y$, also $x = Ax + y$, wobei $y \in \mathbb{R}^n$ lauter positive Komponenten hat, so sind auch die negativen Komponenten von $Ax + y$ im Betrag kleiner als die entsprechenden negativen Komponenten von Ax, d.h. es gilt auch $|(Ax+y)_-| \leq |(Ax)_-|$. Setzen wir alles zusammen, so folgt $|x_-| = |(Ax+y)_-| \leq |(Ax)_-| \leq |Ax_-| \leq \kappa|x_-|$, und wegen $\kappa < 1$ ist das nur möglich, wenn x_- der Nullvektor ist. Das heißt zunächst nur, dass x selbst nichtnegative Komponenten hat, aber aus $x = Ax + y$ folgt dann sogar, dass alle Komponenten von x positiv sind, weil das für y gilt und weil A nichtnegativ ist. Damit ist gezeigt, dass $\mathbb{I}-A$ invers positiv ist, und mit 5) folgt dann auch die Existenz und Positivität von $(\mathbb{I}-A)^{-1}$. (Aus $|x| = |Ax| \leq \kappa|x|$ für $x = Ax$ sieht man auch direkt, dass $(\mathbb{I}-A)x = 0$ nur die triviale Lösung hat, wenn $\kappa < 1$ ist.)

Ist $\|A\|_{\infty,\infty} < 1$ bzw. $\|A\|_{1,1} < 1$, so kann man ganz analog argumentieren, wenn man die Euklidische Norm $|x|$ von Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ ersetzt durch das Komponentenbetragsmaximum $|x|_\infty := \max_{j=1}^n |x_j|$ bzw. durch die Komponentenbetragssumme $|x|_1 := \sum_{j=1}^n |x_j|$. Es gilt dann $|Ax|_\infty \leq \kappa|x|_\infty$ für $\kappa := \|A\|_{\infty,\infty} < 1$ bzw. $|Ax|_1 \leq \kappa|x|_1$ für $\kappa := \|A\|_{1,1} < 1$, und dieselben Überlegungen wie eben zeigen inverse Positivität von $\mathbb{I}-A$. *Ökonomische Anwendungen* der so gewonnenen Positivitätsaussagen über die Inverse zu $\mathbb{I}-A$ mit "kleiner" nichtnegativer Matrix Abesprechen wir in den nächsten Beispielen.

8) Eine andere Matrix-Potenzreihe wollen wir noch erwähnen, weil sie im Zusammenhang mit der Lösung von linearen Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen steht, die auch zur Modellierung ökonomischer Sachverhalte verwendet werden. Die **Exponentialreihe einer quadratischen Matrix** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert als

$$\mathrm{e}^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \mathbb{I} + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und stellt das Matrix-Analogon der Exponentialreihe $\mathrm{e}^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k = 1 + \frac{1}{1!}a + \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{3!}a^3 + \ldots \in \mathbb{R}$ von reellen Zahlen a dar. Mit einer submultiplikativen Matrix-Norm $\|\cdot\|$ wie in 4) kann man die Norm der Glieder durch $\|\frac{1}{k!}A^k\| \leq \frac{1}{k!}\|A\|^k$ abschätzen, und weil die Fakultäten $k!$ mit wachsendem k sehr viel schneller anwachsen als die Potenzen $\|A\|^k$, streben die Einträge der Glieder der Matrix-Exponentialreihe schneller gegen Null als geometrische Nullfolgen, so dass die Reihe tatsächlich für jede quadratische Matrix konvergiert. Es ist dann sinnvoll, den Matrix–Grenzwert der Reihe mit e^A zu bezeichnen in Analogie zum Wert e^a der Exponentialreihe der reellen Zahl a. Für eine Diagonalmatrix D mit Diagonaleinträgen $d_1, \ldots, d_n$ ist z.B. e^D die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\mathrm{e}^{d_1}, \ldots, \mathrm{e}^{d_n}$; aber für allgemeine quadratische Matrizen A hängt jeder Eintrag von e^A im Allgemeinen in komplizierter Weise von *allen* Einträgen von A ab. ■

BEISPIELE (*inverse Positivität, ökonomische Anwendungen*):

1) Die 2×2–Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist positiv für $s > 0$ (alle Einträge sind ≥ 0, und es gibt keine Nullzeile), und $\mathbb{I} - A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist invertierbar für $s \neq \pm 1$ mit

$$(\mathbb{I} - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - s^2} \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist nur für $0 \leq s < 1$ positiv, für $s > 1$ sind dagegen alle Einträge von $(\mathbb{I}-A)^{-1}$ negativ (und für $-1 \neq s < 0$ hat sie zwei negative Einträge). Man sieht hier, dass eine Kleinheitsbedingung wie $\|A\| < 1$ an die nichtnegative Matrix A nicht entbehrlich ist, um inverse Positivität von $\mathbb{I} - A$ schließen zu können. Für $s > 1$ konvergiert natürlich auch die Neumannsche Reihe nicht, obwohl $(\mathbb{I}-A)^{-1}$ existietrt. (Sonst wäre ja $(\mathbb{I}-A)^{-1}$ positiv; hier sieht man Divergenz aber auch direkt an $A^{2k} = s^{2k}\mathbb{I}$.)

2) Bei den statischen **Input-Output-Modellen** (nach *Leontief*) hatten wir in 3.3 gesehen, dass zwischen dem *Produktionsvektor* $x \in \mathbb{R}^n$ und dem *Nachfragevektor* $y \in \mathbb{R}^n$ der lineare Zusammenhang

$$(\mathbb{I} - A)x = y$$

besteht, wobei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die *Matrix der Produktionskoeffizienten* $a_{ij} \geq 0$ ist, die angeben, wieviele Einheiten des Produkts (i) intern ("endogen") für die Herstellung einer Einheit des Produkts (j) gebraucht werden. In einem "normalen" Unternehmen bzw. in einer "gesunden" Volkswirtschaft wird es sich so verhalten, dass die a_{ij} relativ kleine Zahlen oder Null sind. Lassen wir Produkte außer Betracht, die im Produktionsprozess intern völlig verbraucht werden, und nehmen also an, dass bei laufender Produktion von jedem Produkt $(1), \ldots, (n)$ eine positive Menge auf den Markt gebracht werden kann, so ist für jedes i die Summe der Produktionskoeffizienten $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ kleiner als 1, d.h. die Zeilen(–Betrags–)Summen von A sind alle kleiner als 1. Aus 4) und 6) der vorangegangenen Diskussion folgt dann:

- *Sind die Zeilensummen der Produktionskoeffizientenmatrix A alle kleiner als 1, so hat die Gleichung $(\mathbb{I} - A)x = y$ für alle ökonomisch sinnvollen Nachfragevektoren $y \in \mathbb{R}^n$ (d.h. alle Komponenten y_i sind positiv) genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$, und diese ist auch ökonomisch sinnvoll (d.h. auch alle Komponenten x_j sind positiv).*

In der Praxis bedeutet "ökonomisch sinnvoll" für einen Produktionsvektor x allerdings meist nicht nur, dass seine Komponenten positiv sind, sondern man hat auch *Kapazitätsgrenzen* $x_j \leq c_j$ zu berücksichtigen. Das Problem, zu welchen Nachfragevektoren $y \in \mathbb{R}^n$ der Produktionsvektor x auch die Kapazitätsbeschränkungen erfüllt, kann man ebenfalls mit der inversen Positivität von $\mathbb{I}-A$ behandeln. Dazu sei $\mathbf{c} := (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ der *Vektor der Kapazitätsgrenzen*. Dann gilt $(\mathbb{I}-A)(\mathbf{c} - x) = (\mathbb{I}-A)\mathbf{c} - y$, und aus der inversen Positivität von $\mathbb{I}-A$ folgt, dass $\mathbf{c} - x$ lauter nichtnegative Komponenten hat, dass also die Ungleichungen $x_j \leq c_j$ für $j = 1 \ldots n$ gelten, wenn $(\mathbb{I}-A)\mathbf{c} - y$ keine negativen Komponenten besitzt.

- *Hat dann das Produkt $(\mathbb{I}-A)\mathbf{c}$ von $\mathbb{I}-A$ mit dem Vektor der Kapazitätsgrenzen $\mathbf{c}$ keine kleinere Komponente als der Nachfragevektor y, so erfüllt der zugehörige Produktionsvektor x auch die Kapazitätsrestriktionen $x_j \leq c_j$ für $j = 1 \ldots n$.*

Das ist ökonomisch plausibel; denn es besagt, dass man den Nachfragevektor y realisieren kann, wenn bei maximal möglicher Produktion aller Produkte der nicht intern verbrauchte Output eines jeden Produkts die entsprechende Nachfrage übertrifft oder erreicht.

Allerdings ist es nur ein hinreichendes Kriterium für die Realisierbarkeit eines gegebenen Nachfragevektors y. Es ist durchaus möglich, dass der Produktionsvektor zu y die Kapazitätsgrenzen einhält, auch wenn $(\mathbb{I}-A)\mathbf{c}$ eine kleinere Komponente als y hat. Es kann sogar sein, dass $(\mathbb{I}-A)\mathbf{c}$ eine nichtpositive Komponente hat, so dass kein ökonomisch sinnvoller Nachfragevektor eine kleinere Komponente besitzt, aber dennoch sind natürlich alle Nachfragevektoren mit hinreichend kleinen positiven Komponenten innerhalb der Kapazitätsgrenzen realisierbar. Genauer gilt mit den Bezeichnungen $|x|_\infty$ für das Maximum der Komponentenbeträge von x und $\|A\|_{\infty,\infty} < 1$ für das Maximum der Zeilenbetragssummen von A (vgl. 7) der vorangegangenen Diskussion):

$$(\mathbb{I}-A)x = y \iff x = Ax + y \implies |x|_\infty \leq |Ax|_\infty| + |y|_\infty \leq \|A\|_{\infty,\infty}|x|_\infty + |y|_\infty$$
$$\implies |x|_\infty \leq \frac{|y|_\infty}{1 - \|A\|_{\infty,\infty}},$$

woraus man abliest, dass der Produktionsvektor x zu jedem Nachfragevektor y mit Komponenten $0 < y_i \leq (1 - \|A\|_{\infty,\infty}) \min_{j=1}^{n} c_j$ jedenfalls die Kapazitätsgrenzen einhält.

3) Bei der **innerbetrieblichen Leistungsverrechnung** hatten wir in 3.2 das lineare Gleichungssystem

$$(D - A)\mathbf{p} = \mathbf{k}$$

für den *Verrechnungspreisvektor* $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ und den *Primärkostenvektor* $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ aufgestellt, wobei D die *Diagonalmatrix der Gesamtleistungen* $l_i > 0$ der einzelnen Kostenstellen (i) ist, welche die Diagonaleinträge von D bilden, und A die *Verflechtungsmatrix*, deren Einträge $a_{ij} \geq 0$ die von der Kostenstelle (j) an den Betriebsteil (i) abgegebene Zahl von Leistungseinheiten angeben. Ökonomisch sinnvoll sind hier nur positive Verrechnungspreise $p_j > 0$ und nichtnegative Primärkosten $k_i \geq 0$. Wir nehmen dabei an, dass jeder Teilbetrieb (j) nur Leistungen einer einzigen Art erbringt, für die der Verrechnungspreis p_j zu bestimmen ist; das ist keine Einschränkung, weil man sich Betriebsteile, die Leistungen verschiedener Art liefern, in einzelne Stellen aufgespalten denken kann, die jeweils nur Leistungen von einer einzigen Sorte abgeben. Da die Gesamtleistung l_j eines jeden Betriebsteiles (j) nicht kleiner ist als dessen an andere Betriebsteile abgegebene und selbst verbrauchte Leistung, gilt

$$a_{1j} + \ldots + a_{nj} \leq l_j \quad \text{für} \quad j = 1 \ldots n,$$

d.h. keine Spaltensumme von A ist größer als der entsprechende Eintrag von D.

Wir betrachten nun zunächst den Fall, dass jeder Teilbetrieb seine Leistung nicht ausschließlich an andere Betriebsteile abgibt, sondern auch eine direkte Leistung den Gesamtbetrieb erbringt, d.h. $a_{1j} + \ldots + a_{nj} < l_j$ gilt für $j = 1 \ldots n$. Dann hat die Matrix AD^{-1} Spaltensummen $(a_{1j} + \ldots + a_{nj})/l_j < 1$ und nach 6), 7) der vorangegangenen Diskussion existiert daher $(\mathbb{I} - AD^{-1})^{-1}$ und ist eine positive Matrix. Dasselbe gilt natürlich auch für

$$(D - A)^{-1} = [(\mathbb{I} - AD^{-1})D]^{-1} = D^{-1}(\mathbb{I} - AD^{-1})^{-1},$$

d.h. unsere Gleichung $(D-A)\mathbf{p} = \mathbf{k}$ hat eine eindeutige Lösung, und wenn $k_i \geq 0$ ist für alle i, so folgt auch $p_j \geq 0$ für alle j. Wegen $D\mathbf{p} = \mathbf{k} + A\mathbf{p}$, also $l_i p_i = k_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$, ist nur dann $p_i = 0$, wenn die Primärkosten k_i und die Sekundärkosten $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$ von (i) Null sind. (Das entspricht dem Ansatz, aus dem man das Gleichungssystem für die Verrechnungspreise erhalten hat: Die von (i) erbrachte Leistung wird ja so bewertet, dass ihr Geldwert gleich den Gesamtkosten der Stelle (i) ist.) Ist Leistungserbringung ohne Primärkosten nicht möglich, also $k_i > 0$ für alle i, so sind folglich auch alle p_j positiv.

4) Bei vielen Betriebsabläufen gibt es nun aber Betriebsteile $\textcircled{j}$, die ihre Leistungen ausschließlich an andere Teilbetriebe abgeben und keinen Leistungsüberschuss an den Gesamtbetrieb zur Vermarktung liefern (z.B. Reparatur- und Wartungsteilbetrieb). Dafür ist dann $a_{1j} + \ldots + a_{nj} = l_j$, und somit hat in der Matrix AD^{-1} die Spaltensumme $(a_{1j}+\ldots+a_{nj})/l_j$ den Wert 1. In dieser Situation ist die obige Argumentation nicht mehr gültig und inverse Positivität von $\mathbb{I} - AD^{-1}$ ohne weitere ökonomisch sinnvolle Annahmen über die Verflechtungsmatrix nicht mehr gesichert. Eine solche Annahme ist, dass ein *System von Teilbetrieben, das keine Leistung nach außen erbringt*, ausgeschlossen ist. Die Teile eines solchen Systems würden sich nämlich nur gegenseitig Leistungen erbringen, ohne unmittelbar oder mittelbar etwas zum Betriebsergebnis positiv beizutragen, und das ist eine in der Realität zwar manchmal nicht ausgeschlossene, aber ökonomisch sicher nicht sinnvolle Situation. Unsere Annahme verbietet z.B., dass ein Betriebsteil $\textcircled{j}$ seine gesamte erbrachte Leistung selbst wieder verbraucht ($l_j = a_{jj}$) oder dass zwei Betriebsteile $\textcircled{i}$ und $\textcircled{j}$ ihre gesamte Leistung ausschließlich füreinander erbringen ($l_j = a_{ij} + a_{jj}$ und $l_i = a_{ji} + a_{ii}$.). Allgemeiner ist mit unserer Annahme verboten, dass die Spalten mit gewissen Nummern j_k ($j_1 < \ldots < j_m$, $1 \leq m \leq n$) von Null verschiedene Einträge höchstens in diesen Positionen $j_1, \ldots, j_m$ haben und die Spaltensummen gleich l_{j_k} sind.

Unter der Annahme, dass Systeme von Teilbetrieben, die keine Leistung nach außen erbringen, nicht vorhanden sind, können wir nun tatsächlich beweisen, dass $D{-}A$ invertierbar und invers positiv ist, so dass das Gleichungssystem $(D{-}A)\mathbf{p} = \mathbf{k}$ für jeden Primärkostenvektor $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ genau einen Verrechnungspreisvektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ als Lösung hat, wobei alle Komponenten p_j von $\mathbf{p}$ nichtnegativ sind, wenn dies für die Komponenten k_i von $\mathbf{k}$ gilt. Dazu betrachten wir eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ zu $(D{-}A)x = \mathbf{k}$ bzw. $Dx - \mathbf{k} = Ax$, mit m negativen Komponenten, $1 \leq m \leq n$. Nach geeigneter Nummerierung der Betriebsteile können wir $x_1 < 0, \ldots, x_m < 0$ und $x_{m+1} \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ annehmen. Summation der Gleichungen $l_i x_i - k_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ über $i = 1 \ldots m$ liefert:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m l_i x_i - \sum_{i=1}^m k_i &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \\
&\geq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right) \qquad \text{(weil } a_{ij}x_j \geq 0 \text{ für } j > m\text{)} \\
= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) x_j &\geq \sum_{j=1}^m l_j x_j \qquad \text{(weil } \textstyle\sum_{i=1}^m a_{ij} \leq l_j \text{ und } x_j < 0 \text{ für } j = 1 \ldots m\text{)}.
\end{aligned}$$

Sind alle $k_i \geq 0$, so ist das nur möglich, wenn $\sum_{i=1}^m k_i = 0$ ist und $\sum_{i=1}^m a_{ij} = l_j$ für $j = 1 \ldots m$, also insbesondere $a_{ij} = 0$ für $j = 1 \ldots m$ und $i > m$. Dies bedeutet aber, dass die Betriebsteile $\textcircled{1} \ldots \textcircled{m}$ ein System bilden, das keine Leistung nach außen abgibt, und das ist durch unsere Annahme ausgeschlossen. Folglich hat keine Lösung x zu $(D{-}A)x = \mathbf{k}$ eine negative Komponente x_j, wenn $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sind. Daraus folgt erstens, dass $(D{-}A)x = 0$ nur die triviale Lösung hat (sonst gäbe es auch eine Lösung x mit negativer Komponente, weil ja mit x auch $-x$ Lösung ist), dass also die quadratische Matrix $D{-}A$ invertierbar ist, und zweitens, dass $(D{-}A)^{-1}$ eine positive Matrix ist, also nur nichtnegative Einträge und keine Nullzeile hat. Insbesondere sind die durch $(D - A)\mathbf{p} = \mathbf{k}$ gegebenen Verrechnungspreise eindeutig bestimmt und nichtnegativ, weil der Primärkostenvektor $\mathbf{k}$ lauter nichtnegative Komponenten hat.

Sind die Primärkosten k_i für alle Betriebsteile (i) positiv, so sind dann natürlich auch alle Verrechnungspreise p_j positiv und damit ökonomisch sinnvoll. Im Allgemeinen aber wird es Betriebsteile geben, bei denen die Primärkosten $k_i = 0$ sind und nur Sekundärkosten entstehen. In dieser Situation ist nicht ausgeschlossen, dass auch einige Verrechnungspreise $p_i = 0$ sind, was jedoch ökonomisch nicht sinnvoll wäre, weil es ja bedeutet, dass ein Betriebsteil Leistungen erbringt, ohne dass primäre oder sekundäre Kosten entstehen. Mathematisch ist das unter den bisherigen Voraussetzungen aber durchaus möglich, wie das Beispiel der Nullmatrix $A = 0$ zeigt, in dem alle Betriebsteile (i) ohne jede Verflechtung nur Leistungen l_i an den Gesamtbetrieb abgeben. Hier ist dann $p_i = k_i/l_i$ und somit $p_i = 0$, wenn $k_i = 0$ ist. Um Derartiges auszuschließen, also positive Verrechnungspreise zu erhalten, müssen wir eine weitere ökonomisch sinnvolle Annahme an die Verflechtungsmatrix A und den Primärkostenvektor $\mathbf{k}$ machen, nämlich dass ein *System von Teilbetrieben, das keine Leistung von außen bezieht*, ausgeschlossen ist. Dies bedeutet insbesondere, dass es keinen Teilbetrieb gibt, der von keinem anderen Teilbetrieb Leistungen erhält und dem auch keine Primärkosten entstehen. Und es heißt natürlich auch, dass der Primärkostenvektor nicht der Nullvektor sein kann. Allgemein verbietet diese Annahme, dass A Zeilen mit Nummern i_l $(i_1 < \ldots < i_m,\ 1 \leq m \leq n)$ besitzt, derart dass von Null verschiedene Einträge in diesen Zeilen höchstens in den Positionen $i_1, \ldots, i_m$ vorkommen und dass die Primärkosten k_{i_l} alle gleich Null sind (d.h. diese Teilbetriebe beziehen Leistungen ausschließlich voneinander und arbeiten als System ohne Kosten).

Damit können wir dann auch zeigen, dass alle $p_j > 0$ sind. Wäre das nämlich nicht der Fall, so hätten wir nach geeigneter Nummerierung der Teilbetriebe $p_1 = \ldots = p_m = 0$ und $p_{m+1} > 0, \ldots, p_n > 0$ für ein $m \in \{1, \ldots, n\}$. Aus $(D-A)\mathbf{p} = \mathbf{k}$ folgte dann

$$0 = l_i p_i = k_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j = k_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} p_j \qquad \text{für } i = 1 \ldots m$$

und damit $k_i = 0$ für $i = 1 \ldots m$ sowie $a_{ij} = 0$ für $i = 1 \ldots m$ und $j > m$. Das bedeutet aber, dass die Teilbetriebe $(1) \ldots (m)$ ein System bilden, das keine Leistung von außen bezieht, und das hatten wir mit unserer Annahme ja ausgeschlossen. Zusammenfassung:

- *Gibt es bei der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung mit Verflechtungsmatrix A und Gesamtleistungsdiagonalmatrix D kein System von Teilbetrieben, das keine Leistungen nach außen erbringt, so ist das lineare Gleichungssystem $(A-D)\mathbf{p} = \mathbf{k}$ für jeden Primärkostenvektor $\mathbf{k}$ eindeutig lösbar, und alle Verrechnungspreise p_j sind nichtnegativ (wenn alle Primärkosten k_i nichtnegativ sind).*
- *Gibt es zu A und $\mathbf{k}$ auch kein System von Teilbetrieben, das keine Leistungen von außen bezieht, so sind sogar alle Verrechnungspreise p_j positiv.*

Damit ist das Problem der *Existenz, Eindeutigkeit und Positivität der Verrechnungspreise* in sehr befriedigender Weise, d.h. unter ökonomisch sinnvollen Voraussetzungen, gelöst. Wenn bei gegebenen A, D und $\mathbf{k}$ die Auflösung des linearen Gleichungssystems $(D-A)\mathbf{p} = \mathbf{k}$ für die Verrechnungspreise ergibt, dass die Lösung nicht eindeutig ist, so hat der Betrieb ein System von Teilbetrieben, die nur füreinander arbeiten und keine Leistung nach außen abgeben — das muss dann natürlich durch Änderung der Betriebsabläufe abgestellt werden. Wenn sich zwar ein eindeutiger Verrechnungspreisvektor ergibt, der aber Nullkomponenten enthält, so muss ein Fehler bei der Aufstellung der Daten A, D und $\mathbf{k}$ vorliegen, der z.B. auf der unvollständigen Erfassung aller entstehenden Kosten beruht; denn Systeme, die Leistungen ohne Kosten erbringen, existieren in der Realität nicht. Ist aber die Struktur von A, D und $\mathbf{k}$ so, dass ökonomisch unsinnige Systeme von Teilbetrieben nicht existieren, so gibt es auch eindeutige positive Verrechnungspreise! ■

Nun zum zweiten Thema dieses Abschnitts, den Determinanten. Bei 2×2–Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ haben wir schon gesehen, dass man an der Zahl $ad - bc$ direkt ablesen kann, ob die Matrix invertierbar ist oder nicht: Wenn $ad - bc \neq 0$ ist, so existiert die Inverse, andernfalls nicht. Da diese aus den Matrixeinträgen leicht zu berechnende Zahl also bestimmt ("determiniert"), ob die Matrix invertierbar ist oder nicht, heißt sie die *Determinante* der 2×2-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Auch bei der Berechnung der Inversen $\frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$ taucht die Determinante auf, nämlich als Nenner der Einträge der inversen Matrix. Daran kann man zum Beispiel ablesen, dass die Inverse ganzzahlige Einträge hat, wenn das für die Matrix selbst gilt und wenn die Determinante gleich 1 oder gleich -1 ist; und wenn die Determinante den Wert $\pm k$ hat mit $k \in \mathbb{N}$, so lassen sich alle Einträge der Inversen einer ganzzahligen 2×2–Matrix als rationale Zahlen mit ganzem Zähler und Nenner k schreiben.

Die Frage ist nun, ob wir auch für quadratische Matrizen A mit mehr als 2 Zeilen und Spalten eine Zahl $\det(A) \in \mathbb{R}$ aus den Matrixeinträgen berechnen können, die ähnliche Bedeutung hat, also z.B. genau dann ungleich Null ist, wenn die Matrix invertierbar ist. Um einen Anhaltspunkt zu haben, wie man dabei vorgehen könnte, schaut man sich die Eigenschaften der Determinantenfunktion $ad-bc$ von 2×2–Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ an. Eigenschaften, die ins Auge fallen, sind z.B. folgende: Die Determinante hängt linear ab von jeder Spalte $\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right)$ der Matrix und sie ändert sich um den Faktor -1, wenn man die zwei Spalten vertauscht. Es stellt sich heraus, dass durch die analogen Eigenschaften und die zusätzliche Bedingung $\det(\mathbb{I}_n) = 1$ eine Funktion auf dem Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der $n\times n$–Matrizen schon eindeutig bestimmt ist, und dass diese Funktion tatsächlich genau auf den nicht invertierbaren Matrizen den Wert Null annimmt. Dies ist dann die Determinantenfunktion von $n\times n$–Matrizen.

SATZ und DEFINITION (*der Determinante*): *Es gibt für jede natürliche Zahl n genau eine Funktion* $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, *die jeder $n\times n$–Matrix A eine reelle Zahl* $\det(A)$ *zuordnet, genannt die* **Determinante von A**, *und folgende Eigenschaften hat:*

(i) **Normierung:** $\det(\mathbb{I}_n) = 1$, *die Determinante der $n\times n$-Einheitsmatrix ist 1;*

(ii) **Antisymmetrie:** *bei Vertauschung von zwei Spalten in A ändert sich die Determinante um den Faktor -1;*

(iii) **lineare Abhängigkeit von jeder Spalte**, *das heißt*
Homogenität: *multipliziert man eine Spalte von A mit einem Faktor $r \in \mathbb{R}$, so ändert sich auch die Determinante um den Faktor r;*
Additivität: *ist eine Spalte von A die Summe von zwei Spaltenvektoren, so ist* $\det(A)$ *die Summe der Determinanten der beiden Matrizen, die man erhält, wenn man die betreffende Spalte durch jeweils einen der beiden Spaltenvektoren ersetzt.*

DISKUSSION: **1)** Als Erstes betonen wir:

- *Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert.*

Was immer jemand tut, der mit irgendwelchen selbst erfundenen Rechenvorschriften die "Determinante" einer nichtquadratischen Matrix ausrechnet — es ist Unsinn!

2) Ohne die Normierungsbedingung (i) wäre die Determinantenfunktion nur bis auf einen Faktor festgelegt, da auch die Funktion $\mathbb{R}^{n\times n} \ni A \mapsto s \cdot \det(A)$ die Eigenschaften (ii) und (iii) hat für jedes $s \in \mathbb{R}$. Die Bedeutung von (i) ist also lediglich, diesen Faktor festzulegen, und die Normierungsbedingung (i) ist die sinnvollste Art und Weise, dies zu tun.

3) Eine Funktion von k (Spalten-)Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ nennt man *symmetrisch*, wenn sie ihren Wert bei Vertauschung von zwei Vektoren nicht ändert, und *antisymmetrisch*, wenn sie ihren Wert bei dieser Prozedur um den Faktor -1 ändert. In diesem Sinne ist also die Determinante $\det(A)$ eine antisymmetrische Funktion von n Vektoren, nämlich von den n Spalten der $n \times n$–Matrix A. Die Regel gilt nur für die Vertauschung von *zwei* Spalten in der Matrix. Allgemein folgt:

- *Wenn man mehrere Spalten der Matrix untereinander permutiert (d.h. in beliebige andere Reihenfolge bringt), so multipliziert sich die Determinante mit dem Faktor $(-1)^k$, wo k die notwendige Anzahl der Vertauschungen von je zwei Spalten ist, mit denen dieselbe Permutation erreicht wird.*

Bringt man also z.B. die Spalten mit den Nummern $1, 2, 3$ in die Reihenfolge $2, 3, 1$, so ändert das die Determinante überhaupt nicht, weil man mit zwei Spaltenvertauschungen denselben Effekt erreicht (nämlich mit der Vertauschung von erster und zweiter Spalte und anschließender Vertauschung von zweiter und dritter Spalte in der nach der ersten Vertauschung entstandenen Matrix). Eine andere Konsequenz der Antisymmetrie ist, dass die Determinante verschwindet, wenn zwei Spalten der Matrix gleich sind; denn bei Vertauschung dieser Spalten multipliziert sie sich einerseits mit dem Faktor -1, andererseits bleibt sie unverändert, weil die Matrix dieselbe bleibt.

- *Die Determinante ist Null, wenn die Matrix zwei gleiche Spalten hat.*

4) Als *Notation* für die Determinante einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist auch gebräuchlich

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Diese Bezeichnungsweise birgt die Gefahr in sich, dass man die Determinante $|A|$ wie den Betrag einer Zahl für eine stets nichtnegative Größe halten könnte, was sie natürlich nicht ist; denn sie ändert ja z.B. bei Spaltenvertauschung das Vorzeichen (wenn sie $\neq 0$ ist). Außerdem wird $|A|$ auch zur Bezeichnung der Euklidischen Norm der Matrix A verwendet, also der Quadratwurzel aus der Quadratsumme aller Matrixeinträge, und das ist eine ganz andere Größe als $\det(A)$. Von der Notation $|A|$ für die Determinante von A sollte man daher absehen. Bei Anordnung der Matrixeinträge in einem rechteckigen Schema ist es aber praktisch, die Bildung der Determinante einfach dadurch anzuzeigen, dass man die runden Matrix-Klammern durch gerade vertikale Striche ersetzt.

Eine andere Bezeichnungsweise, in der besser zum Ausdruck kommt, dass man die Determinante als eine Funktion von n (Spalten-)Vektoren ansehen kann, ist

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) := \det(A)$$

wenn $A = (a_{ij})$ die $n \times n$–Matrix mit den Spalten $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ ist, also $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^n$ die Einträge $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ hat für $j = 1 \ldots n$. Dann hängt $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ linear ab von jedem der n eingesetzten Vektoren $\mathbf{a}_j$, und bei Vertauschung von zwei der eingesetzten Vektoren ändert sich $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ um einen Faktor -1.

5) Die Homogenität der Determinantenfunktion in jeder Matrixspalte bedeutet, dass das *Herausziehen eines skalaren Faktors aus einer Spalte* erlaubt ist. In der Notation von 4) geschrieben lautet diese Regel für jedes $r \in \mathbb{R}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ra_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ra_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ra_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

oder

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, r\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) = r \cdot \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) .$$

Eine *Warnung* vor einem nicht seltenen Fehler ist hier angebracht: Wenn mehrere Spalten der Matrix mit einem Faktor multipliziert werden, so muss natürlich aus *jeder* Spalte der entsprechende Faktor herausgezogen werden,

$$\det(r_1\mathbf{a}_1, r_2\mathbf{a}_2, \ldots, r_n\mathbf{a}_n) = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n \cdot \det(A) .$$

Wird insbesondere die ganze Matrix A, also jede ihrer n Spalten, mit dem Faktor $r \in \mathbb{R}$ multipliziert, so haben wir den Faktor r^n herauszuziehen:

$$\det(rA) = r^n \cdot \det(A) \qquad \text{für } A \in \mathbb{R}^{n \times n} .$$

Das wird als *Homogenität vom Grad n der Determinantenfunktion auf* $\mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnet. Der Spezialfall $r = -1$ lautet:

$$\det(-A) = (-1)^n \det(A) = \begin{cases} \det(A), & \text{wenn } n \text{ gerade ist,} \\ -\det(A), & \text{wenn } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

6) Die Additivität der Determinantenfunktion in jeder Spalte bedeutet analog, dass das *Herausziehen einer Summe aus einer Spalte* erlaubt ist. In der Notation von 4) geschrieben lautet diese Regel für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ sowie alle Spaltenvektoren $\mathbf{a}'_j = (a'_{1j}, \ldots, a'_{nj})$ und $\mathbf{a}''_j = (a''_{1j}, \ldots, a''_{nj})$ aus $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a'_{1j}+a''_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a'_{2j}+a''_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a'_{nj}+a''_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a''_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a''_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a''_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

oder

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'_j+\mathbf{a}''_j, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'_j, \ldots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}''_j, \ldots, \mathbf{a}_n) .$$

(Dabei stehen die Einträge mit Subskript "j" natürlich in der j-ten Spalte der Matrix; die Einträge in den anderen Spalten sind links und bei den Matrizen rechts jeweils dieselben.)

7) Wenn man die Homogenität und die Additivität der Determinante in jeder Spalte der eingesetzten Matrix kombiniert, so erkennt man, dass auch das *Herausziehen beliebiger Linearkombinationen aus jeder Spalte* erlaubt ist, also

$$\det\Big(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \sum_{k=1}^{l} s_k\mathbf{b}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n\Big) = \sum_{k=1}^{l} s_k \cdot \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

für alle $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l \in \mathbb{R}^n$ und $s_1, \ldots, s_l \in \mathbb{R}$. Dies ist die allgemeine Form der *Multilinearität der Determinantenfunktion* von n (Spalten-) Vektoren in $\mathbb{R}^n$, also der linearen Abhängigkeit von jedem der n Vektoren.

8) Es ist keineswegs selbstverständlich, dass es eine, und nur eine, Funktion det mit den im vorigen Satz angegebenen Eigenschaften gibt. Das zu beweisen, ist Sache der Mathematik. Weil sich im Beweis aber eine explizite Formel ergibt, welche die Determinante einer quadratischen Matrix durch ihre Einträge ausdrückt und viele Eigenschaften der Determinantenfunktion verständlich macht, skizzieren wir den Beweis hier:

Wir zeigen zuerst die *Eindeutigkeit*, dass also die Determinantenfunktion die einzige mit den Eigenschaften (i), (ii) und (iii) ist. Ausgangspunkt ist die Darstellung der Spaltenvektoren $\mathbf{a}_j$ von $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als Linearkombination der kanonischen Basisvektoren e_i von $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \ .$$

Mit der Linearität der Determinante in der ersten Spalte 7) folgt dann

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \det(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} \cdot \det(e_i, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \ . \end{aligned}$$

Nutzen wir in den zuletzt auftretenden Determinanten die Linearität in der zweiten Spalte aus, so folgt weiter:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i'=1}^{n} a_{i1} a_{i'2} \cdot \det(e_i, e_{i'}, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n) \ .$$

So fahren wir fort, bis alle n Linearkombinationen der Basisvektoren herausgezogen sind. Wir erhalten dann eine n-fach iterierte Summe und brauchen dafür n verschiedene Summationsindizes i, i', i'', ..., die wir mit $i_1, i_2, \dots, i_n$ numerieren. Das Ergebnis ist

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \dots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \cdot \det(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}) \ .$$

In der letzten Determinante stehen nun lauter kanonische Basisvektoren. Die Determinante ist Null, wenn zwei von ihnen gleich sind, also muss nur über solche Indexkombinationen $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ summiert werden, die eine *Permutation* der Zahlen $1, 2, \dots, n$ darstellen, d.h. diese Zahlen in irgendeiner Reihenfolge aufführen. Dann kann die Matrix mit den kanonischen Spalten $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}$ durch Spaltenvertauschungen in die Einheitsmatrix $\mathbb{I}_n$ verwandelt werden, also ist ihre Determinante gleich $(-1)^m$, wobei m die Anzahl der Vertauschungen ist, mit denen $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ in $(1, 2, \dots, n)$ zu überführen ist. Bezeichnen wir dieses von $i_1, i_2, \dots, i_n$ abhängige Vorzeichen ("Signum") mit $\operatorname{sign}(i_1, i_2, \dots, i_n) = \pm 1$, so haben wir die Formel

$$\det(A) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \operatorname{sign}(i_1, i_2, \dots, i_n)\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \ ,$$

wobei über alle Permutationen der Zahlen $1, 2, \dots, n$ zu summieren ist. Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt: Wenn es eine Funktion $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (i),(ii) und (iii) gibt, so muss $\det(A)$ aus den Einträgen der Matrix $A = (a_{ij})$ so berechnet werden können wie in dieser Formel.

Gleichzeitig können wir nun die *Existenz* der gesuchten Funktion zeigen, indem wir sie durch eben diese Formel definieren und dann die Eigenschaften (i),(ii),(iii) nachweisen. (i) gilt, weil im Fall der Einheitsmatrix nur der zu $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_n = n$ gehörende Summand von Null verschieden ist und den Wert 1 hat. (iii) gilt, weil jedes in der Summe auftretende Produkt von Matrixeinträgen aus jeder Spalte der Matrix genau einen Eintrag als Faktor enthält. Für (ii) muss man nur bemerken, dass die Vertauschung von Spalte Nr. j mit Spalte Nr. k (mit $j < k$), auf dasselbe hinausläuft wie die Ersetzung der Vorzeichen $\operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_j, \ldots, i_k, \ldots, i_n)$ durch $\operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_j, \ldots, i_n)$; die beiden Vorzeichen unterscheiden sich aber gerade durch einen Faktor -1, weil sich die beiden Permutationen eben um eine Vertauschung unterscheiden. Damit alles korrekt ist, muss man noch überlegen, dass das Vorzeichen $\operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ einer Permutation eindeutig definiert ist, d.h. dass die Anzahl der Vertauschungen von je zwei Gliedern, mit denen man $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ in $(1, 2, \ldots, n)$ bringen kann, unabhängig von der konkreten Wahl dieser Vertauschungen immer gerade oder immer ungerade ist. Das kann man z.B. einsehen, indem man überlegt, dass im Produkt $\prod_{1<h<l\leq n}(i_l - i_h)$ gerade $2(k-j)+1$ Faktoren ihr Vorzeichen ändern, wenn man i_j mit i_k vertauscht für ein Paar von Zahlen $j < k$. Man kann also $\operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ einfach als das Vorzeichen dieses Produkts definieren (das offenbar positiv ist, wenn $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $\ldots, i_n = n$). ■

Die explizite Formel, die sich für die Berechnung der Determinante aus den Matrixeinträgen ergeben hat, ist zwar für die Berechnung der Determinante von großen quadratischen Matrizen ungeeignet (weil die auftretende Summe zu viele Summanden hat, nämlich $n!$ (Fakultät von n) Summanden im Falle von $n{\times}n$–Matrizen), aber bei $3{\times}3$–Matrizen ist sie gut brauchbar, und sie liefert weitere interessante Eigenschaften der Determinantenfunktion. Deshalb besprechen wir die Formel noch etwas genauer in folgender

DISKUSSION mit BEISPIELEN: 1) Für $n{\times}n$–Matrizen $A = (a_{ij})$ gilt die sog. **Leibnizsche Formel:**

$$\det(A) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n)\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}\,,$$

wobei über alle Permutationen $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ zu summieren ist und das Vorzeichen $\operatorname{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ gleich $(-1)^m$ ist, wenn $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ mit m Vertauschungen von jeweils zwei Gliedern in $(1, 2, \ldots, n)$ überführt werden kann. Da diese Formel, die wir oben hergeleitet haben, für Nicht-Mathematiker schwer zu entschlüsseln ist, geben wir ihren Inhalt in Worten an:

- *Die Determinante einer $n{\times}n$–Matrix erhält man, indem man auf alle möglichen Arten n Matrixpositionen herausgreift, derart dass keine zwei aus derselben Spalte oder derselben Zeile genommen werden, die Produkte der in den herausgegriffenen Positionen befindlichen n Matrixeinträge bildet, sie mit dem Vorzeichenfaktor $+1$ bzw. -1 multipliziert, wenn die herausgegriffenen Positionen durch eine gerade bzw. ungerade Anzahl von Spaltenvertauschungen auf die Matrixdiagonale gebracht werden können, und schließlich alle so gebildeten und mit Vorzeichenfaktoren versehenen Produkte aufsummiert.*

2) Eine unmittelbare Folgerung aus der Leibnizschen Formel ist:

- *Die Determinantenfunktion* $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist eine homogene Polynomfunktion der Matrixeinträge vom Grad n.*

Dies bedeutet, dass $\det(A)$ für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch eine Formel zu berechnen ist, bei der Produkte von jeweils n Matrixeinträgen gebildet werden, die nach einer festen Regel aus der Matrix herausgegriffen werden (hier sogar so, dass keine Faktoren eines solchen Produkts derselben Zeile oder derselben Spalte entnommen sind), und dann mit festgelegten Koeffizienten (hier nur $+1$ und -1) linear kombiniert werden. Die schon besprochene Rechenregel $\det(rA) = r^n \det(A)$ für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist eine unmittelbare Folgerung.

3) Für 1×1-Matrizen $A = (a)$ ist natürlich

$$\det(a) \;=\; a$$

der einzige Eintrag der Matrix. Mehr gibt es hierzu nicht zu sagen.

4) Für $n = 2$ gibt es genau zwei Permutationen von $(1,2)$, nämlich $(1,2)$ (die "identische Permutation", bei der gar nichts vertauscht wird) und die Vertauschung $(2,1)$. Erstere hat das Vorzeichen $+1$, letztere das Vorzeichen -1, also lautet die Leibnizsche Formel für die *Determinante von* 2×2*–Matrizen*:

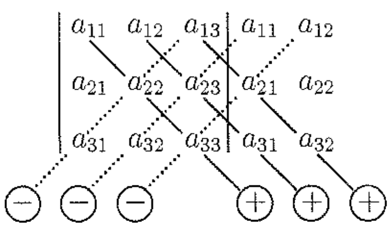
$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \;=\; a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \,.$$

Das ist genau dieselbe Formel $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$, mit der wir die Determinante von 2×2–Matrizen schon früher definiert hatten.

5) Für $n = 3$ gibt es bereits 6 Permutationen $(1,2,3)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$ mit dem Vorzeichen $+1$ und $(3,2,1)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$ mit dem Vorzeichen -1. Die Leibnizsche Formel für die *Determinante einer* 3×3*–Matrix* $A = (a_{ij})$ lautet also:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \,.$$

Mit folgendem Schema kann man sich diese Formel einprägen: Man schreibt die beiden ersten Spalten der Matrix nochmals rechts neben die Matrix, addiert die Produkte der jeweils drei Einträge auf jeder der drei Diagonalen von links oben nach rechts unten und subtrahiert die Produkte der drei Einträge auf jeder der drei Diagonalen von rechts oben nach links unten. Dies ist die sog. **Sarrussche Regel**:



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Wir betrachten als konkretes Beispiel die Determinante der "Telefon-Matrix":

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{r} 1 \cdot 5 \cdot 9 \;+ 2 \cdot 6 \cdot 7 \;+ 3 \cdot 4 \cdot 8 \\ -3 \cdot 5 \cdot 7 \;- 1 \cdot 6 \cdot 8 \;- 2 \cdot 4 \cdot 9 \end{array} \right\} = 0 \,.$$

Die Determinante der Telefon-Matrix hat also den Wert Null.

6) Für $n = 4$ hat die Leibnizsche Formel für die Determinante einer $n \times n$–Matrix schon 24 Summanden, für $n = 5$ gar 120; denn die Anzahl der Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ ist ja $n!$ (Fakultät von n). Das zur Sarrusschen Regel analoge Schema bei 4×4–Matrizen gäbe aber nur 8 Summanden und kann schon deswegen keine korrekte Berechnung der Determinante sein. Das wird aber nicht selten falsch gemacht, daher die *Warnung*:

- *Bei quadratischen Matrizen vom Format* 4×4 *oder größer gilt keine "Sarrussche Regel" für die Berechnung der Determinante!*

7) Die Leibnizsche Formel für die Determinante hat eine Symmetrie, die zeigt, dass alle Eigenschaften der Determinante als Funktion der Spalten einer quadratischen Matrix analog für Zeilen gelten. Um das zu sehen, ordnen wir die Faktoren in einem nach Spaltennummern sortierten Produkt von Matrixeinträgen so um, dass die Faktoren mit aufsteigenden Zeilennummern aufeinander folgen:

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} .$$

Dabei ist $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ die *Umkehrpermutation* der Permutation $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ von $1, 2, \ldots, n$, d.h. die Permutation, die man erhält, wenn man dieselben Vertauschungen von Gliedern, die $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ in $(1, 2, \ldots, n)$ überführen, auf $(1, 2, \ldots, n)$ anwendet. Insbesondere hat $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ dasselbe Vorzeichen wie $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, und deshalb kann man die Leibnizsche Formel auch schreiben:

$$\det(A) = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \operatorname{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} ,$$

weil mit $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ auch die Umkehrpermutationen $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ alle Permutationen von $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen. Nun ist aber a_{ij} der Eintrag in Position (j, i) der transponierten Matrix A^{T} zur Matrix $A = (a_{ij})$ und man erkennt, dass die Summe in der letzten Formel nichts anderes ist als die Determinante von A^{T}.

- *Die* $n \times n$*–Matrix* A *und ihre transponierte Matrix* A^{T} *(deren Spalten die Zeilen von* A *sind) haben dieselbe Determinante:*

$$\det(A) = \det(A^{\mathsf{T}}) .$$

- *Folglich gelten alle bisher und künftig in Bezug auf die Matrixspalten formulierten Eigenschaften der Determinantenfunktion völlig analog auch in Bezug auf die Zeilen.*

Also ist z.B. $\det(A)$ eine lineare Funktion in jeder Zeile der Matrix A, und bei Vertauschung von zwei Zeilen in der Matrix ändert sich die Determinante auch um den Faktor -1, genau wie bei Spaltenvertauschungen. ■

Die Leibnizsche Formel ist, wie gesagt, nicht gut zur Berechnung der Determinante von größeren quadratischen Matrizen geeignet. Aus den grundlegenden Eigenschaften der Determinantenfunktion folgen aber Rechenregeln für Determinanten, mit denen man auch die Determinante größerer quadratische Matrizen effektiv berechnen kann. Diese stellen wir zusammen in folgenden

RECHENREGELN für Determinanten: Hier sei A stets eine $n \times n$–Matrix.

1) Wir haben als Folge der Antisymmetrie der Determinantenfunktion in den Spalten der Matrix schon vermerkt, dass die Determinante einer Matrix verschwindet, wenn sie zwei gleiche Spalten hat. Das gilt wegen der Homogenität dann natürlich auch, wenn eine Spalte Vielfaches einer anderen ist; denn nach Herausziehen eines Faktors aus einer Spalte verbleibt dann ja die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Spalten. Und wenn A eine Nullspalte hat, so kann man den Faktor 0 herausziehen, also ist auch dann die Determinante gleich Null. Alles gilt, wie gesagt, analog auch für Zeilen statt Spalten.

- $\det(A) = 0$, *wenn A eine Nullspalte (bzw. eine Nullzeile) hat, oder zwei gleiche Spalten (bzw. Zeilen), oder zwei Spalten (bzw. Zeilen), die sich nur um einen skalaren Faktor unterscheiden.*

2) Folgende **Zeilen- und Spaltenoperationen mit Determinantentermen** $\det(A)$ sind zulässig, d.h. sie verändern den Wert des Terms nicht:

(i) *Man addiert ein Vielfaches einer Zeile / Spalte von A zu einer anderen;*

(ii) *man vertauscht zwei Zeilen/Spalten in A und multipliziert die Determinante mit -1;*

(iii) *man zieht aus einer Zeile / Spalte von A einen Faktor $r \in \mathbb{R}$ vor die Determinante.*

Damit ist natürlich gemeint $\det(A) = \det(A') = -\det(A'') = r\det(A''')$, wenn A' aus A durch Addition einer Zeile / Spalte zu einer anderen entsteht (natürlich darf man nie Zeilen zu Spalten addieren oder umgekehrt — das wäre völliger Unfug!), wenn A'' aus A durch eine Vertauschung von zwei Zeilen / Spalten hervorgeht, und wenn A aus A''' gebildet wird durch Multiplikation einer Zeile / Spalte mit dem Faktor r. Die Regel (iii) folgt unmittelbar aus der Homogenität der Determinantenfunktion in den Spalten (und den Zeilen) der Matrix, und die Regel (ii) ist nichts anderes als die Antisymmetrie der Determinante als Funktion der Spalten (bzw. Zeilen). Die Regel (i) gilt für die Spalten $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ von A, weil z.B. $\det(A') = \det(\ldots, \mathbf{a}_j + s\mathbf{a}_k, \ldots, \mathbf{a}_k, \ldots)$ ist für gewisse $j \neq k$ aus $\{1, \ldots, n\}$ und $s \in \mathbb{R}$. (Die angegebenen Spalten befinden sich in den Positionen j und k; die nicht angegebenen Spalten sind dieselben wie bei A; der Fall $j > k$ ist analog.) Wegen der Linearität der Determinante in der j-ten Spalte ist folglich $\det(A')$ gleich der Summe von $\det(\ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_k, \ldots) = \det(A)$ und von $s \cdot \det(\ldots, \mathbf{a}_k, \ldots, \mathbf{a}_k, \ldots) = 0$ (weil es sich ja um die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Spalten handelt), d.h. es gilt $\det(A') = \det(A)$ wie behauptet.

3) Der Nutzen der Zeilen- und Spaltenoperationen bei der Determinantenberechnung besteht darin, dass man mit solchen Operationen die Matrix vereinfachen kann, ohne ihre Determinante zu ändern bzw. mit Änderung nur um genau bekannte Vorfaktoren. Ziel der Vereinfachungen ist natürlich, eine Form der Matrix zu erreichen, für die man die Determinante unmittelbar ablesen kann. Das ist zum Beispiel bei Dreiecksgestalt der Fall:

- *Die* **Determinante einer Dreiecksmatrix** *ist das Produkt der Diagonaleinträge.*

Ist nämlich ein Diagonaleintrag $= 0$, so kann man die Dreiecksmatrix A durch Zeilenoperationen wie in 2) auf eine Zeilen-Stufen-Form mit mindestens einer Nullzeile bringen, also ist dann die Determinante nach 1) gleich Null und ebenso auch das Produkt der Diagonaleinträge der Matrix. Sind aber alle Diagonaleinträge $a_{ii} \neq 0$, so kann man durch

Zeilenoperationen vom Typ 2) (i) Diagonalgestalt der Matrix erreichen, ohne die Diagonaleinträge zu verändern; dann zieht man die Faktoren $a_{11}, \dots, a_{nn}$ nacheinander aus den Spalten Nr. $1, \dots$,Nr. n heraus und erhält $\det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \cdot \det(\mathbb{I}) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

4) Auf den Rechenregeln in 2) und 3) beruht das wichtigste

- **Berechnungsverfahren für Determinanten:** *Bringe die Matrix durch Zeilen- und/oder Spaltenoperationen auf Dreiecksgestalt und halte fest, um welchen Faktor sich die Determinante dabei ändert (wenn überhaupt); die noch verbleibende Determinante der Dreiecksmatrix ist einfach das Produkt ihrer Diagonaleinträge.*

Da man für die Determinantenberechnung Zeilenoperationen *und* Spaltenoperationen vornehmen darf, ist es hier meist viel einfacher, die Matrix auf Dreiecksform zu bringen, als bei der Lösung linearer Gleichungssysteme, wo nur Zeilenoperationen (und allenfalls noch Spaltenvertauschungen) zugelassen sind. Insbesondere kann man bereits vorhandene Nulleinträge in der Matrix zur Vereinfachung der Rechnungen hier besser ausnutzen.

5) Es gilt eine auch oft nützliche Verallgemeinerung von 3), der sog. **Kästchen-Satz:**

- *Die* **Determinante einer Dreiecks-Block-Matrix** *ist das Produkt der Determinanten ihrer quadratischen Diagonalblöcke.*

Eine obere Dreiecks–Block–Matrix A hat die nebenstehende Form mit quadratischen Matrizen $A_1, A_2, \dots, A_k$ auf der Diagonalen (das sind die "Diagonalblöcke" bzw. die "Kästchen"), deren Zeilenzahlen $n_1, n_2, \dots, n_k$ sich zur Zeilenzahl n der quadratischen Matrix A addieren, und mit Nulleinträgen unterhalb der Diagonalblöcke sowie beliebigen Einträgen in den Diagonalblöcken und oberhalb dieser Blöcke. Der "Kästchen-Satz" besagt:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & * \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_k} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2) \cdot \ldots \cdot \det(A_k)\,.$$

Er gilt für untere Dreiecks-Block-Matrizen analog und wird oft in Situationen angewendet, in denen man nur zwei Diagonalblöcke hat. Der Beweis ergibt sich aus 2) und 3), indem man die Diagonalblöcke der Reihe nach auf Dreiecksform bringt, wobei man die Zeilenoperationen jeweils nur mit Zeilen ausgeführt, die durch den betreffenden Diagonalblock verlaufen. Die Determinanten der einzelnen Blöcke sind danach die Produkte ihrer Diagonaleinträge, und die Determinante der ganzen Matrix, die dann auch Dreiecksgestalt hat, ist das Produkt aller Diagonaleinträge, also auch gleich dem Produkt der Blockdeterminanten.

6) Bei der *rekursiven Berechnung einer Determinante* durch Rückführung auf die Determinanten von kleineren quadratischen Matrizen ist folgende Terminologie nützlich: Die *Restmatrix* einer $n \times n$–Matrix A zur Position (i,j) ist die $(n-1) \times (n-1)$–Matrix A_{ij}, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht (also durch Streichen der durch die Position (i,j) gehenden Zeile und Spalte). Das *Positionsvorzeichen* zur Position (i,j) ist $(-1)^{i+j}$. Dieses Vorzeichen ist $+1$, wenn man die Position durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen unmittelbar benachbarter Zeilen oder benachbarter Spalten auf die Diagonale der Matrix bringen kann, und es ist -1, wenn dafür eine ungerade Anzahl von solchen Vertauschungen erforderlich ist. Der *Kofaktor* von A zur Position (i,j) ist das Produkt der Restmatrixdeterminante mit dem Vorzeichen der Position, also $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

Es gilt dann der sog. **Determinanten-Entwicklungssatz** von *Laplace*:

- *Die Determinante von A ist die Linearkombination der Kofaktoren von A zu allen Positionen in einer beliebig gewählten Zeile oder Spalte mit den an diesen Positionen befindlichen Einträgen von A als Koeffizienten; in Formeln:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) \qquad (\textit{Entwicklung nach der } i\textit{-ten Zeile}),$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) \qquad (\textit{Entwicklung nach der } j\textit{-ten Spalte}),$$

wobei in der ersten Formel i die Nummer der ausgewählten Zeile ist und in der zweiten Formel j die Nummer der ausgewählten Spalte. Mit dem Entwicklungssatz wird die Berechnung der Determinante einer $n\times n$–Matrix zurückgeführt auf die Berechnung der Determinanten von maximal n Matrizen des Formats $(n-1)\times(n-1)$. In der Praxis wählt man die Zeile oder Spalte, nach der die Determinante "entwickelt" wird, natürlich so, dass die Rechnungen möglichst einfach werden, dass also z.B. viele Nulleinträge in der Zeile / Spalte stehen.

Um den Entwicklungssatz zu beweisen, schreiben wir z.B. die j-te Spalte von A als Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ der kanonischen Basisvektoren und ziehen die Linearkombination aus der Determinante heraus: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\det(\widetilde{A}_{ij})$, wobei $\widetilde{A}_{ij}$ aus A entsteht, indem man die j-te Spalte durch e_i ersetzt. Durch $j-1$ Vertauschungen unmittelbar nebeneinander liegender Spalten und $i-1$ Vertauschungen unmittelbar übereinander liegender Zeilen in $\widetilde{A}_{ij}$ bringt man die Position (i,j), auf der nun 1 eingetragen ist, in die Position $(1,1)$ und erhält so die Matrix $\widehat{A}_{ij}$ mit erster Spalte e_1 und mit der Restmatrix A_{ij} als diagonaler Block in Zeilen und Spalten Nr. $2\dots n$. Nach 2) und 5) gilt dann $\det(\widetilde{A}_{ij}) = (-1)^{i-1+j-1}\det(\widehat{A}_{ij}) = (-1)^{i+j}\cdot 1\cdot\det(A_{ij})$.

Es gibt noch eine allgemeinere Version des Entwicklungssatzes, wobei man nach k fest gewählten Spalten (bzw. nach k fest gewählten Zeilen) entwickelt ($1 \le k < n$). Man greift dann auf alle möglichen Arten k Zeilen heraus (bzw. k Spalten) und bildet das Produkt der Determinante der durch die jeweils betrachteten k Spalten und k Zeilen gegebenen $k\times k$–Untermatrix (gebildet aus den Positionen, in denen sich diese Spalten und Zeilen kreuzen) mit der Determinante der nach Streichen dieser Spalten und Zeilen verbleibenden $(n-k)\times(n-k)$–Restmatrix. Das Produkt wird noch multipliziert mit dem Vorzeichen (-1) hoch Zahl der Vertauschungen benachbarter Spalten oder Zeilen, mit denen man die $k\times k$–Untermatrix in eine zur Diagonalen symmetrische Lage bringen kann, und dann ist die Summe der mit diesen Vorzeichen versehenen Determinantenprodukte über alle $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten aus n Spalten (bzw. Zeilen) k herauszugreifen, gleich der Determinante der gegebenen $n\times n$–Matrix. Dies ist der *allgemeine Laplacesche Entwicklungssatz*, der aber mehr theoretische als praktische Bedeutung hat; deshalb unterlassen wir es, dafür eine Formel aufzuschreiben (die schwerer zu dekodieren wäre als die gegebene Beschreibung).

7) Es gibt eine — auf den ersten Blick überraschend einfache — Regel für die Berechnung der Determinante eines Produkts von zwei gleichformatigen quadratischen Matrizen:

- **Determinanten-Produktsatz:** *Die Determinante des Produkts zweier (gleichformatiger, quadratischer) Matrizen A, B ist das Produkt ihrer Determinanten,*

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B).$$

Man sagt dazu auch: *Die Determinantenfunktion ist multiplikativ* auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Unmittelbare Folgerungen sind (mit $k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
\det(A^k) &= (\det(A))^k, \quad \det(AB) = \det(BA), \\
\det(A^{-1}) &= \frac{1}{\det(A)}, \quad \det(A^{-k}) = \frac{1}{(\det(A))^k}, \quad \text{wenn } A \text{ invertierbar ist}, \\
\det(C^{-1}AC) &= \det(A), \quad \text{wenn } C \text{ invertierbar ist}.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt, dass *ähnliche Matrizen dieselbe Determinante haben.* Man kann den Produktsatz auf mehrere Arten beweisen, z.B. mit den in 3.3 eingeführten Elementarmatrizen $M_i(r)$, $A_{ij}(s)$ und V_{ij}, deren Multiplikation von links an A entsprechende Zeilenoperationen bei A bewirken. Aus 2) und 3) sieht man $\det(M_i(r)) = r$, $\det(A_{ij}(s)) = 1$, $\det(V_{ij}) = -1$ und daher $\det(EA) = \det(E)\det(A)$, wenn E irgendeine Elementarmatrix ist. Ist A invertierbar, so kann man A durch Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix transformieren, d.h. es gibt Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ mit $E_k \cdots E_1 A = \mathbb{I}$. Dann folgt

$$1 = \det(\mathbb{I}) = \det(E_k \cdots E_1 A) = \det(E_k) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(A)$$

und

$$\det(B) = \det(\mathbb{I}B) = \det(E_k \cdots E_1 AB) = \det(E_k) \cdot \ldots \cdot \det(E_1) \cdot \det(AB),$$

also $\det(B) = \frac{1}{\det(A)} \det(AB)$. Ist aber A nicht invertierbar, so hat A eine Zeilen-Stufen-Form mit einer Nullzeile, also ist $\det(A) = 0$, und dieselben Zeilentransformationen, welche diese Zeilen-Stufen-Matrix herstellen, ergeben bei Anwendung auf AB ebenfalls eine Matrix mit Nullzeile, so dass auch $\det(AB) = 0$ ist.

Eleganter ist der Beweis des Produktsatzes, wenn man die charakterisierenden Eigenschaften der Determinantenfunktion aus ihrer Definition benutzt. Man sieht sofort, dass $\widetilde{\det}(B) := \det(AB)$ bei fester Matrix A eine antisymmetrische und multilineare Funktion der Spalten von B ist. Aus dem früheren Beweis der Eindeutigkeit der Determinantenfunktion folgt dann schon $\widetilde{\det}(B) = s \cdot \det(B)$ mit dem Faktor $s = \widetilde{\det}(\mathbb{I}) = \det(A)$, d.h. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Bei Verwendung der Notation $|A|$ für die Determinante von A erhält der Produktsatz die Form $|AB| = |A||B|$ eines Rechengesetzes für Beträge. (Aber die Determinante $|A|$ ist kein Betrag! Sie kann ja auch negative Werte annehmen.) ∎

BEISPIELE (*zur Determinantenberechnung*);

1) Wir berechnen nochmals die Determinante der Telefon-Matrix, einmal mit Transformation auf Dreiecksform durch Zeilenoperationen,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0,$$

einmal mit Entwicklung nach der ersten Zeile,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0.$$

Die zweite Berechnungsart ist hier aufwendiger, weil man keine Nulleinträge in der Matrix nutzen kann. Bei der ersten Berechnung hätte man auf die zweite Matrix auch den Kästchen-Satz anwenden können und $1 \cdot \left|\begin{smallmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{smallmatrix}\right| = 0$ als Ergebnis erhalten. Noch besser wäre es gewesen, gleich zu erkennen, dass die letzte Zeile dieser Matrix das 2–fache der mittleren Zeile ist und daher die Determinante verschwindet.

2) Wir berechnen die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

mit dem Entwicklungssatz. Es bietet sich die Entwicklung nach der zweiten Spalte ein, weil diese zwei Nulleinträge hat:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} .$$

Die beiden noch zu berechnenden Determinanten von 3×3–Matrizen kann man mit der Sarrusschen Regel ausrechnen oder z.B. durch Entwickeln nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} &= -2 \cdot \left[1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right] \\ &\quad -2 \cdot \left[3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right] \\ &= -2 \cdot [(-1)(-4+2) + (-1)(-2+3)] - 2 \cdot [(-3)(-4+2) + (-2)(2-6)] \\ &= -2 \cdot [2-1] - 2 \cdot [6+8] \;=\; -30 . \end{aligned}$$

3) Wir berechnen die Determinante der Matrix aus 2) nochmals, diesmal mit Transformation auf Dreiecksform durch Zeilen- und Spaltenoperationen. Zunächst addieren wir die zweite zur dritten Zeile, subtrahieren die erste von der vierten Zeile und klammern den Faktor -2 aus der zweiten Spalte aus (Letzteres muss man nicht tun; wir wollen aber auch diese Spaltenoperation vorführen),

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} ,$$

dann addieren wir das Doppelte der letzten Spalte und das 8-fache der vorletzten zur ersten Spalte,

$$= (-2) \cdot \begin{vmatrix} 15 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2)(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-2)[1 \cdot 15 \cdot (-1) \cdot (-1)] = -30 ,$$

wobei wir im vorletzten Schritt die ersten beiden Spalten und die ersten beiden Zeilen vertauscht und im letzten Schritt die Determinante als Produkt der Diagonaleinträge der Dreiecksmatrix berechnet haben. Statt der beiden letzten Schritte hätten wir auch den Kästchen-Satz anwenden können und direkt $(-2)[(15 \cdot 1) \cdot (-1)^2] = -30$ erhalten. ■

Man sieht, dass man bei Determinantenberechnungen auf vielen verschiedenen Wegen zum Ziel kommen kann. Das Bestreben ist stets, die *Zeilen- und Spaltenoperationen so zu wählen, dass schon vorhandene Nulleinträge ausgenutzt werden*, und außerdem so, dass Brüche nach Möglichkeit gar nicht, oder erst möglichst spät in der Rechnung auftreten. Das letzte Beispiel demonstriert, dass die Transformation der Matrix auf Dreiecksgestalt mittels Zeilen- und Spaltenoperationen meist die einfachste Methode ist.

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

(K. Steffen, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, WS 2006/07)

Wir kommen nun zum Ausgangspunkt unserer Diskussion der Determinanten zurück: Wir hatten ja eine jeder quadratischen Matrix A zugeordnete und (verhältnismäßig) einfach zu berechnende Zahl $\det(A)$ gesucht, mit der man anhand des Kriteriums $\det(A) \neq 0$ die Invertierbarkeit der Matrix leicht feststellen kann. Dass dieses Invertierbarkeitskriterium tatsächlich gilt, hatten wir im Prinzip schon im Beweis des Produktsatzes gezeigt: Wenn A^{-1} existiert, so gilt $1 = \det(\mathbb{I}) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$, also muss dann $\det(A) \neq 0$ sein. Wenn andererseits A^{-1} nicht existiert, so lässt sich mit Zeilenoperationen eine Zeilen-Stufen-Form aus A herstellen, die eine Nullzeile hat, also ist dann $\det(A) = 0$. Man kann mit Determinanten aber nicht nur die Invertierbarkeit von A prüfen, sondern auch explizite Formeln für die Einträge von A^{-1} und damit auch für die Lösungen $x = A^{-1}b$ eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ angeben. Wir tun das in folgendem

SATZ (Determinante und inverse Matrix): *Sei A eine $n{\times}n$–Matrix. Dann gilt:*

(i) **Determinantenkriterium für Invertierbarkeit:**

$$A \text{ invertierbar} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A) \neq 0\,.$$

(ii) **Cramersche Regel für die Inverse:** *Wenn sie existiert, so ist die Inverse A^{-1} die transponierte Kofaktor-Matrix zu A dividiert durch die Determinante von A,*

$$A^{-1} = (b_{ji}) \quad \textit{mit} \quad b_{ji} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j}\det(A_{ij}) \qquad \textit{für} \quad i,j = 1\dots n\,.$$

(iii) **Cramersche Regel für die Lösung von linearen Gleichungssystemen:** *Wenn $\det(A) \neq 0$ ist, so ist die eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch*

$$x_j = \frac{\det(A \text{ mit } j\text{-ter Spalte ersetzt durch } b)}{\det(A)} \qquad \textit{für } j = 1\dots n\,.$$

Wir erinnern daran, dass A_{ij} die $(n{-}1){\times}(n{-}1)$–Restmatrix bezeichnet, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht; $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ heißt dann der **Kofaktor** von A zur Position (i,j), und dies ist laut (ii) gerade der Eintrag in Position (j,i) bei der inversen Matrix, wenn sie existiert. Die Regel (iii) sagt, dass die j-te Komponente des Lösungsvektors der Quotient von zwei Determinanten ist, nämlich $\det(A)$ als Nenner (wenn $\neq 0$) und als Zähler die Determinante der Matrix, die aus A entsteht, indem man die j-te Spalte von A ersetzt durch den Spaltenvektor der rechten Seiten des Gleichungssystems.

Den Beweis von (i) haben wir oben schon gegeben. (ii) folgt aus dem Entwicklungssatz $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$. Ersetzt man in der Summe a_{ij} durch a_{hj} mit einer Zeilennummer $h \neq i$, so läuft das auf die Bildung der Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen hinaus, also hat die Summe dann den Wert Null. Somit gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{hj}\frac{(-1)^{i+j}\det(A_{ij})}{\det(A)} = \delta_{hi} = \begin{cases} 1 & \text{für } h = i\,, \\ 0 & \text{für } h \neq i\,, \end{cases}$$

d.h. für die Matrix $B = (b_{ji})$ mit den in (ii) angegebenen Einträgen gilt $AB = \mathbb{I}$ und damit (weil es sich um quadratische Matrizen handelt) $B = A^{-1}$. Die eindeutige Lösung $x = A^{-1}b$ zu $Ax = b$ hat dann die Komponenten

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}b_i = \frac{1}{\det(A)}\sum_{i=1}^{n} b_i(-1)^{i+j}\det(A_{ij})\,.$$

Die letzte Summe kann aber nach dem Entwicklungssatz aufgefasst werden als die Entwicklung nach der j-ten Spalte der Matrix, die aus A mit Ersetzen der j-ten Spalte durch b entsteht, und das beweist (iii).

DISKUSSION: Die Cramersche Regel ist nicht geeignet zur Berechnung der inversen Matrix oder der Lösung eines quadratischen linearen Gleichungssystems — der Rechenaufwand ist viel zu groß! (Außer der Determinante von A braucht man noch n weitere Determinanten von $n \times n$–Matrizen.) Die Bedeutung der Regel liegt vielmehr darin, dass sie Strukturaussagen über die Abhängigkeit der Inversen A^{-1} bzw. der Lösung zu $Ax = b$ von den Einträgen der quadratischen Matrix $A = (a_{ij})$ und der Spalte b der rechten Seiten erlaubt.

Da beim Gaußschen Eliminationsverfahren nur die Grundrechenarten angewendet werden, ist von vorneherein klar, dass die Einträge von A^{-1} rationale Funktionen der Einträge von A sind. Die Cramersche Regel zeigt nun, dass man bei diesen rationalen Funktionen die Determinantenfunktion als Hauptnenner verwenden kann. Genauer sind die Einträge von A^{-1} homogene Polynomfunktionen des Grades $n-1$ in den Einträgen a_{ij} von A mit ganzen Koeffizienten dividiert durch die homogene Polynomfunktion $\det(A)$ des Grades n. Und die Komponenten des Lösungsvektors $x = A^{-1}b$ sind homogene Polynomfunktionen des Grades n in den Einträgen a_{ij} von A und b_i von b dividiert durch $\det(A)$. (Eine Funktion von mehreren Variablen heißt *Polynomfunktion von mehreren Veränderlichen*, wenn sie sich als Linearkombination von Produkten dieser Variablen schreiben läßt, wobei die Variablen in den Produkten auch mehrfach, also in Potenzen, auftreten dürfen. Kommen dabei immer nur Produkte mit derselben Zahl k von Faktoren vor, so heißt die Polynomfunktion *homogen vom Grad k.*)

Für Matrizen mit ganzen Zahlen als Einträgen folgt aus der Cramerschen Regel insbesondere:

- *Hat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ganzzahlige Einträge, so ist auch die Determinante $q := \det(A)$ eine ganze Zahl, und wenn $q \neq 0$ ist, so sind alle Einträge von A^{-1} als Brüche mit ganzem Zähler und mit Nenner q darstellbar; dasselbe gilt dann auch für die Komponenten der Lösung x zu $Ax = b$, wenn auch b nur ganzzahlige Einträge hat.*
- *Hat A ganzzahlige Einträge und Determinante $\det(A) = \pm 1$, so hat auch A^{-1} ganzzahlige Einträge, und wenn alle Komponenten von b ganzzahlig sind, so hat auch die Lösung x zu $Ax = b$ lauter ganzzahlige Komponenten.* ■

Eine (auch für die Ökonomie) wichtige Anwendung des Determinantenkriteriums für Invertierbarkeit von quadratischen Matrizen besteht in der Bestimmung der Eigenwerte einer quadratischen Matrix. Hierunter versteht man Folgendes:

DEFINITION. Eine Zahl λ heißt **Eigenwert** einer $n\times n$–Matrix A (bzw. des zugehörigen linearen Operators $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $L(x) = Ax$), wenn es einen Vektor $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $Ax = \lambda x$, d.h. x wird bei Multiplikation mit der Matrix A (bzw. bei Anwendung des linearen Operators L) bis auf den Faktor λ reproduziert. Jeder solche Vektor $x \neq 0$ heißt dann ein **Eigenvektor** von A (bzw. von L) zum Eigenwert λ. ■

DISKUSSION: **1)** Die Begriffe "Eigenvektor" und "Eigenwert" sind *nur bei quadratischen Matrizen erklärt.* Ist A nicht quadratisch, so hat der Vektor Ax ein anderes Format als x, also ist eine Gleichung der Form $Ax = \lambda x$ unsinnig! (λ ist der kleine griechische Buchstabe "Lambda" und für Eigenwerte eine übliche Bezeichnung wie auch der kleine griechische Buchstabe "Mü" μ.)

2) Die Bedingung $x \neq 0$ für Eigenvektoren ist nötig, weil $Ax = \lambda x$ ja für jede Zahl λ stets die triviale Lösung $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ hat (wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Wir sind hier aber an *nichttrivialen Lösungen* der Gleichung $Ax = \lambda x$ interessiert, und nur diese heißen "Eigenvektoren" und nur die Zahlen λ, zu denen Eigenvektoren existieren, "Eigenwerte". Es stellt sich heraus, dass $Ax = \lambda x$ für die meisten Zahlen λ nur die triviale Lösung hat. Nur für endlich viele "Ausnahmezahlen" λ gibt es eine nichttriviale Lösung dieser Gleichung, und diese Ausnahmen sind gerade die Eigenwerte von A. ■

BEISPIELE (*von Eigenwerten und Eigenvektoren*):

1) Für die *Einheitsmatrix* $\mathbb{I}_n$ sind alle $x \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1; denn es gilt ja $\mathbb{I}_n x = x$. Von 1 verschiedene Eigenwerte gibt es nicht (da aus $\mathbb{I}_n x = \lambda x$ folgt $x = \lambda x$ und daher $\lambda = 1$, wenn x nicht lauter Nullkomponenten hat).

2) *Skalare Matrizen* $A = s\mathbb{I}_n$ erfüllen $Ax = sx$ für alle x, also ist $\lambda = s$ ihr einziger Eigenwert, und alle $x \neq 0$ sind Eigenvektoren.

3) *Diagonalmatrizen* D haben genau ihre Diagonaleinträge $d_1, \ldots, d_n$ als Eigenwerte; denn für den Spaltenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist Dx der Spaltenvektor $(d_1x_1, \ldots, d_nx_n)$, und dies ist gleich $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$, nur wenn $\lambda = d_j$ ist für mindestens ein j oder wenn alle $x_j = 0$ sind. Für den i-ten kanonischen Basisvektor gilt $De_i = d_ie_i$, also ist er ein Eigenvektor von D und d_i der zugehörige Eigenwert. Allgemeiner sieht man, dass $Dx = \lambda x$ genau dann gilt, wenn $d_j = \lambda$ gilt für alle j mit $x_j \neq 0$. Falls also alle Diagonaleinträge verschieden sind, so sind nur die kanonischen Basisvektoren und Vielfache davon ($\neq 0$) Eigenvektoren zu D. Sind aber mehrere Diagonaleinträge gleich, so sind alle Linearkombinationen ($\neq 0$) der zugehörigen kanonischen Basisvektoren Eigenvektoren.

4) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat den *Eigenwert Null*, genau wenn $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung besitzt, also genau wenn $\det(A) = 0$ ist. Die nichttrivialen Lösungen sind dann die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$.

5) *Potenzen* A^k von A mit Exponenten $k \in \mathbb{N}$ haben die Potenz λ^k als Eigenwert und x als zugehörigen Eigenvektor, wenn x Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist; denn aus $Ax = \lambda x$ folgt $A^kx = A^{k-1}(Ax) = A^{k-1}(\lambda x) = \lambda A^{k-1}x = \lambda^2 A^{k-2}x = \ldots = \lambda^k x$. Wenn A^{-1} existiert, so gilt das auch für negative ganze Exponenten; denn $A^kx = \lambda^kx \implies \lambda^{-k}x = \lambda^{-k}A^{-k}(A^kx) = \lambda^{-k}A^{-k}(\lambda^kx) = A^{-k}x$. ■

FRAGE: Wie findet man die Eigenwerte einer $n\times n$–Matrix A und wie die zugehörigen Eigenvektoren $x \in \mathbb{R}^n$?

Hierzu schreiben wir die Gleichung $Ax = \lambda x$ um in der Form $Ax = \lambda \mathbb{I} x \iff (\lambda\mathbb{I} - A)x = 0$ und sehen, dass λ genau dann ein Eigenwert ist, wenn das homogene Gleichungssystem $(\lambda\mathbb{I} - A)x = 0$ nichttriviale Lösungen hat (die dann die zu λ gehörenden Eigenvektoren sind). Dies ist nun genau dann der Fall, wenn A *nicht* invertierbar ist, also gemäß dem Determinantenkriterium für (Nicht-)Invertierbarkeit genau dann, wenn $\det(\lambda\mathbb{I} - A) = 0$ ist. Nun wissen wir aber aus der Leibnizschen Formel, dass die Determinante einer $n\times n$–Matrix ein vom Grad n homogenes Polynom in den Matrixeinträgen ist. Bei der Matrix $t\mathbb{I} - A$ sind diese Einträge $-a_{ij}$ für $i \neq j$ bzw. $t - a_{ii}$ für $i = j$. Daher ist $\det(t\mathbb{I} - A)$ als Funktion der skalaren Variablen t (bei fester Matrix A) eine Polynomfunktion vom Grad höchstens n. (Der Grad ist tatsächlich genau gleich n.) Und die Eigenwerte λ sind gerade die Nullstellen dieser Polynomfunktion!

DEFINITION: Das **charakteristische Polynom** einer $n\times n$–Matrix A ist die Polynomfunktion vom Grad n

$$p_A(t) \ := \ \det(t\mathbb{I} - A) \ = \ t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \ldots + c_1 t + c_0 \,.$$

SATZ: *Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms von A. (Es gibt also höchstens n Eigenwerte.) Die zu einem Eigenwert λ gehörenden Eigenvektoren sind genau die nichttrivialen Lösungen $x \in \mathbb{R}^n$ des homogenen linearen Gleichungssystems* $(\lambda\mathbb{I} - A)x = 0$. ■

DISKUSSION: **1)** Dass das charakteristische Polynom den Grad n und den führenden Koeffizienten $c_n = 1$ hat, kann man aus der Leibnizschen Formel sehen. $\det(t\mathbb{I} - A)$ ist danach eine Linearkombination (mit Koeffizienten $+1$ und -1) von Produkten von n aus verschiedenen Zeilen und Spalten der Matrix herausgegriffenen Einträgen $t\delta_{ij} - a_{ij}$. Nur ein solches Produkt, nämlich das Produkt der Diagonaleinträge $(t-a_{11})(t-a_{22})\cdot\ldots\cdot(t-a_{nn}) = t^n \pm \ldots$, gibt einen Beitrag zur führenden Potenz t^n.

2) Alle anderen auftretenden Produkte haben sogar zwei nichtdiagonale Einträge, tragen als höchstens zu Potenzen t^k mit $0 \leq k \leq n-2$ bei. Der Koeffizient c_{n-1} des charakteristischen Polynoms vor t^{n-1} ist daher derselbe wie bei $(t - a_{11})(t - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (t - a_{nn}) = t^n - (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})t^{n-1} \pm \ldots$, und das ist gerade das Negative der Spur von A (Summe der Diagonaleinträge). Auch den Koeffizienten c_0 des charakteristischen Polynoms können wir sofort angeben, er ist $c_0 = p_A(0) = \det(0\mathbb{I} - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. (Im letzten Schritt haben wir aus n Spalten den Faktor -1 herausgezogen!) Wir haben damit folgende genauere Information über die *Koeffizienten des charakteristischen Polynoms*:

$$p_A(t) \ = \ t^n - \mathrm{Spur}(A)t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \ldots + c_1 t + (-1)^n \det(A) \,.$$

Speziell bei 2×2-*Matrizen* $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ist

$$p_A(t) \ = \ t^2 - \mathrm{Spur}(A)t + \det(A) \ = \ t^2 - (a+d)t + (ad-bc) \,,$$

was man natürlich auch direkt durch Berechnung der Determinante $\det(t\mathbb{I} - A) = \left|\begin{smallmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{smallmatrix}\right| = (t-a)(t-d) - bc$ erhält.

3) Es ist auch bekannt, wie man die *anderen Koeffizienten des charakteristischen Polynoms* $p_A(t)$ im Fall $n > 2$ berechnet: $(-1)^k c_{n-k}$ ist die Summe aller sog. *k–Hauptminoren* von A, d.h. der Determinanten aller $k{\times}k$–Matrizen, die man aus A durch Streichen von $n{-}k$ Zeilen und $n{-}k$ Spalten mit denselben Nummern wie die Zeilen erhalten kann. (Diese $k{\times}k$–Untermatrizen liegen also symmetrisch zur Diagonalen von A; wenn die Nummern der gestrichenen Spalten nicht alle mit denen der gestrichenen Zeilen übereinstimmen, so nennt man die Determinante der $k{\times}k$–Restmatrix einen *k–Nebenminor* von A.) Der Beweis kann geführt werden, indem man $\det(t\mathbb{I} - A)$ als Funktion der Spalten $te_j - \mathbf{a}_j$ von $t\mathbb{I} - A$ auffasst und die Differenz sowie den Faktor t aus jeder Zeile herauszieht. Man findet so, dass der Koeffizient von t^{n-k} die Summe der Determinanten aller Matrizen ist, die aus $-A$ mit Ersetzen von $n{-}k$ Spalten durch die entsprechenden Spalten der Einheitsmatrix hervorgehen, und diese Determinanten sind — bis auf den Faktor $(-1)^k$ — gerade die k–Hauptminoren. Letzteres sieht man nach geeigneten Zeilen- und Spaltenvertauschungen mit dem Kästchensatz für die Determinantenberechnung.

4) *Nicht jede $n{\times}n$–Matrix hat einen reellen Eigenwert*, weil nicht jede Polynomfunktion eine reelle Nullstelle hat. Zum Beispiel ist für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ das charakteristische Polynom $p_A(t) = t^2 + 1$ ohne Nullstelle in $\mathbb{R}$. Geometrisch beschreibt A eine 90°–Drehung in der Ebene $\mathbb{R}^2$, und es ist auch anschaulich klar, dass dabei kein Vektor $\neq 0$ auf ein Vielfaches von sich selbst abgebildet wird. Da aber jede Polynomfunktion von ungeradem Grad eine Nullstelle auf $\mathbb{R}$ hat (z.B. wegen des Zwischenwertsatzes), gilt andereseits:

- *Ist n ungerade, so hat jede $n{\times}n$–Matrix A mindestens einen reellen Eigenwert.*

Dies ist übrigens die algebraische Erklärung dafür, warum Drehungen im $\mathbb{R}^3$ (anders als in $\mathbb{R}^2$ oder auch $\mathbb{R}^4$) stets eine Achse festlassen.

5) Dem Fehlen von Eigenwerten kann man abhelfen, indem man *komplexe Eigenwerte* $\lambda \in \mathbb{C}$ zulässt, d.h. komplexe Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p_A(t)$. Im Komplexen gilt der *Fundamentalsatz der Algebra*, wonach jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen hat, wenn man jede mit ihrer Vielfachheit zählt. Somit hat jede $n{\times}n$–Matrix auch genau n Eigenwerte λ im Bereich $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ der komplexen Zahlen, wenn man jeden mit seiner Nullstellenvielfachheit beim charakteristischen Polynom zählt. Um zu λ gehörende Eigenvektoren zu finden, also nichttriviale Lösungen x zu $(\lambda\mathbb{I} - A)x = 0$, muss man dann natürlich auch n-gliedrige Vektoren x mit komplexen Zahlen als Komponenten zulassen (wenn λ nicht reell ist).

Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die komplexen Eigenwerte, jeder mit seiner Vielfachheit aufgeführt, so sieht man aus der Linearfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms $p_A(t) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$ durch Vergleich mit den in 2) angegebenen Koeffizienten:

- *Die Summe aller (mit ihrer Vielfachheit aufgeführten) komplexen Eigenwerte der $n{\times}n$–Matrix A ist die Spur von A, ihr Produkt ist die Determinante von A.*

Das gilt erst recht, wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (zufällig) n reelle Eigenwerte hat (mit Vielfachheit). ■

BEISPIELE: 1) Die **Eigenwerte von Dreiecksmatrizen** $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind gerade ihre Diagonaleinträge; denn hier ist ja auch $t\mathbb{I} - A$ Dreiecksmatrix, also $p_A(t) = \det(t\mathbb{I} - A)$ das Produkt der Diagonaleinträge $(t - a_{11}) \cdot \ldots \cdot (t - a_{nn})$, und dieses Polynom hat genau die Nullstellen a_{ii}. Die zum Eigenwert $\lambda = a_{ii}$ gehörenden Eigenvektoren bekommt man durch Auflösen des homogenen linearen Gleichungssystems $(a_{ii}\mathbb{I} - A)x = 0$ (die nichttrivialen Lösungen sind die Eigenvektoren). Das ist hier auch einfach, weil dieses Gleichungssystem ebenfalls Dreiecksform hat. Konkretes Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{hat die Eigenwerte } 1, 2 \text{ und } -1\,;$$

Das Gleichungssystem für die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x_1 = r \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \;, \quad \text{Eigenvektoren:} \quad \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; (r \neq 0)\,;$$

das Gleichungssystem für die Eigenvektoren zum Eigenwert 2 lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = s \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{matrix} \;, \quad \text{Eigenvektoren:} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} \; (s \neq 0)\,;$$

das Gleichungssystem für die Eigenvektoren zum Eigenwert -1 ist schließlich:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x_1 = -\frac{1}{2}t \\ x_2 = -\frac{1}{3}t \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{matrix} \;, \quad \text{Eigenvektoren:} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} \; (t \neq 0)\,.$$

2) Die *Eigenwerte einer Potenz* A^k von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind genau die Potenzen λ^k aller komplexen Eigenwerte λ von A. (Diese Potenzen können durchaus reell sein, auch wenn λ nicht reell ist. Z.B. ist $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$ eine nichtreelle komplexe Zahl, aber $\mathbf{i}^2 = -1$ ist reell.) Der Beweis kann am einfachsten geführt werden, indem man das Problem über dem Zahlbereich $\mathbb{C}$ betrachtet, wo es auf den Fall von Dreiecksmatrizen rückgeführt werden kann. Ist aber A Dreiecksmatrix, so auch A^k, und die Diagonaleinträge, also die Eigenwerte, von A^k sind gerade die Potenzen $(a_{ii})^k$ der Diagonaleinträge von A.

3) *Nilpotente Matrizen* $N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ haben nur den Eigenwert 0 (mit Vielfachheit n); denn aus $Nx = \lambda x$ folgt $N^k x = \lambda^k x$ und wegen der Nilpotenz ist $N^k = 0$ für genügend große k. Man kann zeigen, dass auch umgekehrt jede $n{\times}n$–Matrix mit n-fachem Eigenwert 0 nilpotent ist.

4) *Involutorische Matrizen* A, d.h. $A^2 = \mathbb{I}$, haben nur die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$, da $\lambda^2 = 1$ ist nach 3). Geometrisch gedeutet sind involutorische lineare Abbildungen *Spiegelungen.* Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 (und der Ursprung 0) entsprechen dabei den Punkten des "Spiegels", die unter der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden.

5) Die *transponierte Matrix hat dasselbe charakteristische Polynom* wie A, also auch dieselben Eigenwerte; denn es ist ja $\det(t\mathbb{I} - A^\mathsf{T}) = \det((t\mathbb{I} - A)^\mathsf{T}) = \det(t\mathbb{I} - A)$. Die Eigenvektoren bei A^T sind aber im Allgemeinen andere als bei A.

6) Ein *geschlossenes Leontief-Modell* ist ein Input-Output-Modell $(\mathbb{I} - A)x = y$ (siehe 3.2 und 3.4 oben), in dem es zum Absatzvektor $y = 0$ eine Lösung $x \neq 0$ mit lauter nichtnegativen Komponenten gibt. Dies bedeutet, dass die gesamte Produktion für den endogenen Input verwendet wird. Bei einem Unternehmen würde das nicht lange gut gehen, aber bei einer Volkswirtschaft ist es denkbar. Wegen $(\mathbb{I} - A)x = 0 \iff Ax = x$ ist ein Leontief-Modell genau dann geschlossen, wenn die Produktionsmatrix A einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 mit lauter nichtnegativen Komponenten besitzt. Ist A positiv wie hier (d.h. alle $a_{ij} \geq 0$ und A ohne Nullzeile), so gibt es übrigens stets einen positiven Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor mit lauter positiven Komponenten. Dies garantiert der sog. *Satz von Perron & Frobenius*, der in der Mathematik bewiesen wird. ■