Lösungsvorschlag für Klausur B

Aufgabe 1:

(a) Mit Hilfe der geometrischen Summenformel gilt

$$y_1 = 2\sum_{j=0}^{8} 3^j = 2 \cdot \frac{3^{8+1}-1}{3-1} = 2 \cdot \frac{3^9-1}{2} = 3^9 - 1 = 19682.$$

Mit Hilfe der arithmetischen Summenformel gilt

$$y_2 = \sum_{i=20}^{50} i = \sum_{i=1}^{50} i - \sum_{i=1}^{19} i = \frac{50 \cdot 51}{2} - \frac{19 \cdot 20}{2} = 25 \cdot 51 - 10 \cdot 19 = 1085.$$

(b) Es gilt $y_3 = 2 + 0.\overline{2}$. Wir setzen $b = 0.\overline{2}$. Dann gilt

$$9b = 10b - b = 2.\overline{2} - 0.\overline{2} = 2,$$

d.h. $b = \frac{2}{9}$. Daraus folgt

$$y_3 = 2 + b = 2 + \frac{2}{9} = \frac{20}{9}.$$

Aufgabe 2:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{x+7} = -x+5$. Quadrieren wir beide Seiten, so folgt $x+7 = (-x+5)^2$, d.h. $x + 7 = x^2 - 10x + 25$. Also

$$x^2 - 11x + 18 = 0.$$

Mit der p-q-Formel folgt $x = 2$ oder $x = 9$. Durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung erhalten wir, das $x = 2$ die einzige Lösung der Gleichung $\sqrt{x+7} = x - 5$ ist.

(b) Es gilt $x^3 - 2x^2 - x = x(x^2 - 2x - 1)$. Also gilt

$$x^3 - 2x^2 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } x^2 - 2x - 1 = 0 \;\overset{\text{p-q-Formel}}{\Leftrightarrow}\; x = 0 \text{ oder } x = 1 + \sqrt{2} \text{ oder } x = 1 - \sqrt{2}.$$

Damit gilt $\mathbb{L} = \{1 - \sqrt{2}, 0, 1 + \sqrt{2}\}$.

(c) Die Gleichung $\ln(4x) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$ ist nur für $x > 1$ definiert. Sei also $x > 1$ mit $\ln(4x) = \ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln((x-1)(x+1))$. Dann gilt $4x = (x-1)(x+1)$ und somit $x^2 - 4x - 1 = 0$. Mit der p-q-Formel folgt $x = 2 + \sqrt{5}$ oder $x = 2 - \sqrt{5}$. Da die Gleichung für $x = 2 - \sqrt{5}$ nicht definiert ist, folgt, dass $x = 2 + \sqrt{5}$ die einzige Lösung der Gleichung ist.

Aufgabe 3:

(a) Mit der p-q-Formel erhält man, dass $x = -1$ und $x = 5$ die Lösungen von $x^2 - 4x - 5 = 0$ sind. Damit gilt $x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$. Also gilt

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 < 0 \;&\Leftrightarrow\; (x + 1 < 0 \text{ und } x - 5 > 0) \text{ oder } (x + 1 > 0 \text{ und } x - 5 < 0) \\ &\Leftrightarrow\; (x < -1 \text{ und } x > 5) \text{ oder } -1 < x < 5. \end{aligned}$$

Es folgt $\mathbb{L} =]-1, 5[$.

(b) Da $1+x^2>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und die Ungleichung für $x=\pm 1$ nicht definiert ist, genügt es, die folgenden Fälle zu unterscheiden.
1.Fall: $1-x^2>0$, d.h. $-1<x<1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^2}>\frac{x}{1-x^2} \text{ und } -1<x<1 &\Leftrightarrow x(1-x^2)>x(1+x^2) \text{ und } -1<x<1\\ &\Leftrightarrow 2x^3<0 \text{ und } -1<x<1\\ &\Leftrightarrow -1<x<0.\end{aligned}$$

2.Fall: $1-x^2<0$, d.h. $x<-1$ oder $x>1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^2}>\frac{x}{1-x^2} \text{ und } (x>1 \text{ oder } x<-1) &\Leftrightarrow x(1-x^2)<x(1+x^2) \text{ und } (x>1 \text{ oder } x<-1)\\ &\Leftrightarrow 2x^3>0 \text{ und } (x>1 \text{ oder } x<-1)\\ &\Leftrightarrow x>1.\end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbb{L}=]-1,0[\cup]1,\infty[$.

(c) Wir unterscheiden zwei Fälle.
1.Fall: $x+1\geq 0$, d.h. $x\geq -1$. Dann gilt

$$|x+1|<2x-1 \text{ und } x\geq -1 \iff x+1<2x-1 \text{ und } x\geq -1 \iff 2<x.$$

2.Fall: $x+1<0$, d.h. $x<-1$. Dann gilt

$$|x+1|<2x-1 \text{ und } x<-1 \Leftrightarrow -(x+1)<2x-1 \text{ und } x<-1 \Leftrightarrow 3x>0 \text{ und } x<-1.$$

In diesem Fall gibt es also keine Lösung. Somit gilt $\mathbb{L}=]2,\infty[$.

Aufgabe 4:

(a) Es gilt

$$\det(A_x) \overset{\substack{\text{Entw. nach}\\ \text{3. Zeile}}}{=} (-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\det\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & x\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix} = -2-x.$$

(b) Es gilt

$$\det(A_x)\neq 0 \Leftrightarrow -2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2.$$

(c) Sei $x\in\mathbb{R}$ mit $\det(A_x)\neq 0$ und sei $B_x\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ die Matrix, die aus A_x entsteht, wenn man die ersten beiden und die letzten beiden Spalten von A_x vertauscht. Dann gilt

$$\det(B_x)=\det(A_x).$$

Daraus folgt

$$\det(2A_x^{-1}B_x)=2^4\cdot\frac{1}{\det(A_x)}\cdot\det(B_x)=16\cdot\frac{1}{\det(A_x)}\cdot\det(A_x)=16.$$

Aufgabe 5: Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

(a) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-\text{III}]{\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}\cdot\frac{1}{2}]{\text{I}-a\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

und wir erhalten

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a-1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{I}-\text{III}]{\text{II}-\text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}\cdot\frac{1}{a}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

und wir erhalten

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6:

(a) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir setzen $x_2 = r, x_4 = s, x_5 = t$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$x_3 = -x_4 - ax_5 = -s - at$$

und

$$x_1 = -x_2 - x_3 = -r + s + at.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -r+s+at \\ r \\ -s-at \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid r,s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Aus der letzten Zeile erhalten wir einen Widersruch. Also hat das lineare GLS $Ax = (0,1,1)^T$ keine Lösung.

(c) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir setzen $x_2 = r, x_4 = s, x_5 = t$ mit $r,s,t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$x_3 = -1 - x_4 - ax_5 = -1 - s - at$$

und

$$x_1 = -x_2 - x_3 = -r + 1 + s + at.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-r+s+at \\ r \\ -1-s-at \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid r,s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 7:

(a) Es gilt

$$||u_2|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

und

$$||u_4|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Außerdem gilt

$$||u_2 + u_4|| = ||(2,0,2,0)^T|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}.$$

(b) Beispielsweise gilt

$$u_1 - u_2 - u_3 = 0.$$

Setzen wir also $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = 1, r_4 = 0$, so folgt $\sum_{i=1}^4 r_i u_i = 0$.

(c) Es gilt

$$u_2 \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -t \\ 3t \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-t) + (-1) \cdot 3t = 0 \;\Leftrightarrow\; -3 - 4t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = -\frac{3}{4}.$$

Also ist u_2 nur für $t = -\frac{3}{4}$ orthogonal zu $(0,4,-t,4t)^T$.

Aufgabe 8:

(a) Es gilt

$$K_3 = 1.02 \cdot 1.04 \cdot 1.05 \cdot 10000\,€ \;= 11138.40\,€ \;.$$

(b) Der Zinssatz p_* ist gegeben durch

$$\left(1 + \frac{p_*}{100}\right)^3 = 1.02 \cdot 1.04 \cdot 1.05.$$

Daraus folgt

$$p_* = 100(\sqrt[3]{1.02 \cdot 1.04 \cdot 1.05} - 1) \approx 3.659\%.$$

Aufgabe 9: Es ist $R_0 = 200\,000$ € und $N = 10$.

(a) (i) (lineare Abschreibung) Die Abschreibungsrate ist gegeben durch

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{10} = \frac{R_0}{N} = 20\,000\,€$$

Somit erhalten wir $R_4 = R_0 - 4 \cdot a_1 = 120\,000\,€$.

(ii) (2 Jahre degressive Abschreibung und anschließend 2 Jahre lineare Abschreibung) Die Abschreibungsrate a_1 ist gegeben durch

$$a_1 = \frac{20}{100} R_0 = 40\,000\,€ \;.$$

Dann gilt $R_1 = R_0 - a_1 = 160\,000\,€$. Die Abschreibungsrate a_2 ist gegeben durch

$$a_2 = \frac{20}{100} R_1 = 32\,000\,€ \;.$$

Dann gilt $R_2 = R_1 - a_2 = 128\,000\,€$. Wir erhalten

$$a_3 = \frac{R_2}{10-2} = \frac{128\,000}{8}\,€ \;= 16\,000\,€ \;.$$

Damit gilt $R_4 = R_2 - 2 \cdot 16000\,€ \;= 96\,000\,€$.

(b) Der Wechsel im $(n+1)$-Jahr von degressiver zu linearer Abschreibung ist genau dann optimal, wenn erstmalig

$$p(N-n) \leq 100$$

gilt. Hier gilt

$$20(10-n) \leq 100$$

erstmalig für $n = 5$, d.h. der Wechsel von degressiver zu linearer Abschreibung ist im 6. Jahr optimal.

Aufgabe 10: Gesucht ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit

$$1.05^n \cdot 600000 - \frac{1.05^n - 1}{0.05} \cdot 60000 < 60000.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 1.05^n \cdot 600000 - \frac{1.05^n - 1}{0.05} \cdot 60000 < 60000 &\iff 1,05^n \left(600000 - \frac{60000}{0.05}\right) < 60000 - \frac{60000}{0.05} \\ &\iff -600000 \cdot 1.05^n < -1140000. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$1.05^n > \frac{-1140000}{-600000} = \frac{19}{10}$$

und somit

$$n > \frac{\ln \frac{19}{10}}{\ln 1.05} \approx 13,155.$$

Es kann also 14 Jahre lang eine Rente von 60 000 **€** gezahlt werden..