Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

WS 2021/22
09.12.2021
Blatt 7

ÜBUNGEN ZU MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER I

1. (Bei dieser Aufgabe werden nur die Ergebnisse korrigiert.) Für die Vektoren $x = (2,3,4)^\top, y = (1,0,2)^\top$ und $z = (6,0,-3)^\top$ berechne man

(a) $|x|, |y|$ und $|z|$,

(b) $|x-y|, |y-z|$ und $|z-x|$,

(c) $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle$ und $\langle z, x\rangle$,

(d) $\left\{u = (u_1, u_2, u_3)^\top \in \mathbb{R}^3 : \langle u, x\rangle = \langle u, y\rangle = 0\right\}$.

2. (Bei dieser Aufgabe werden auch die Begründungen bewertet.) Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen

$$\| \quad \| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \|x\|$$

den Normeigenschaften (N1) bis (N3) genügen:

(a) $\|x\| := (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$,

(b) $\|x\| := |x_1 + x_2| + |x_3|$,

(c) $\|x\| := (|x_1| + |x_2|^2 + |x_3|^3)^{\frac{1}{6}}$,

(d) $\|x\| := |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3|$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Bitte wenden!

3. (Bei dieser Aufgabe wird auch die Rechnung bewertet.) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) $$\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ x + 3y &= 15 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ x + y + z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

4. (Multiple Choice) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

(a) Zwischen dem arithmetischen Mittel $AM(x_1, \dots, x_n)$, dem geometrischen Mittel $GM(x_1, \dots, x_n)$ und dem harmonischen Mittel $HM(x_1, \dots, x_n)$ bestehen die Ungleichungen

$$HM(x_1, \dots, x_n) \leq AM(x_1, \dots, x_n) \leq GM(x_1, \dots, x_n).$$

(b) Ein Skalarprodukt auf einem euklidischen Vektorraum ist charakterisiert durch die folgenden drei Eigenschaften: Linearität in der ersten Komponente, Symmetrie und Definitheit.

(c) Ist $a \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor, so wird durch

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \varphi(x) := \langle a, x \rangle + \langle x, a \rangle$$

eine lineare Abbildung definiert. (Hierbeit bezeichnet $\langle \quad , \quad \rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.)

(d) Ist $(V, \langle \quad , \quad \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, so gilt für alle $x, y \in V$

$$\langle x - y, x + y \rangle = |y|^2 - |x|^2.$$

Abgabe: So., 19.12.2021 (bis 23.55 Uhr)
Besprechung: Mo., 20.12.2021