1.8 Das uneigentliche Integral

Fragestellung:

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei auf jedem Intervall $[\alpha, \beta]$ integrierbar. Unter welchen Voraussetzungen kann man dann die Integrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ und $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ definieren. Für Funktionen die "schnell genug" gegen Null konvergieren wie z. B. die Gauss-funktion $f(x) = e^{-x^2}$ sollte dies möglich sein

(ii) $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ oder $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ sei auf jedem Intervall $[\alpha, \beta] \subset (a,b]$ bzw. $\subset [a,b)$ integrierbar, ggf. mit $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (oder $\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$). Läßt sich trotzdem das $\int_a^b f(x)\,dx$ sinnvoll erklären.

Im Hinblick auf die Interpretation des Integrals als Flächeninhalt sollte dies in vielen Fällen möglich sein. Im wesentlichen geht man in beiden Fällen gleich vor und erklärt diese sogenannten "uneigentlichen Integrale" als Grenzwerte eigentlicher Integrale, sofern diese existieren. Im einzelnen:

In (i) erklärt man

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

und

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^b f(x)\,dx,$$

falls diese Grenzwerte existieren (im eigentlichen Sinn, also als reelle Zahlen).

Für das Integral über die gesamte reelle Achse verlangen wir die Existenz zweier unabhängiger Grenzwerte:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty \\ S\to\infty}} \int_{-S}^{R} f(x)\,dx ,$$

falls dieser Grenzwert bei beliebiger Annäherung von R und S an ∞ existiert.

Bsp.: $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2}$, wenn es denn existierte, würde dem Mittelwert der Cauchy-Verteilung entsprechen.)

Wählen wir $R = S$ erhalten wir

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} 0 = 0$$

(ungerader Integrand auf symmetrischem Integrationsbereich!), was unserer naiven Erwartung entspricht.

<u>Aber</u>: Wählen wir $S = \frac{R}{2}$:

$$\lim_{R,S\to\infty} \int_{-S}^{R} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2}\int_{R/2}^{R} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\Big|_{R/2}^{R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+R^2}{1+\frac{R^2}{4}}\right) = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left(4\,\frac{1+R^2}{4+R^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \ln(4),$$

was uns bereits etwas irritiert. Wählen wir schließlich

$S = \sqrt{R}$ ergibt die obige Rechnung

$$\lim_{R,S \to \infty} \int_{-S}^{R} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1+R^2}{1+R}\right) = \infty$$

Also: Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ existiert nicht. (Stattdessen verwendet man den sog. Cauchy'schen Hauptwert $\text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0.$)

Weitere Beispiele:

(1) $$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{0} e^x\,dx = \lim_{R\to\infty} 1 - e^{-R} = 0$$

(2) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{(1+x)^2} = \lim_{R\to\infty} \frac{-1}{1+x}\Big|_0^R$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{-1}{1+R} + 1 = 1$$

(3) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big|_1^R$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(\lim_{R\to\infty} R^{1-\alpha} - 1\right) = \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

nur für $\alpha > 1$

(bzw. für $\alpha = 1$: $= \lim_{R\to\infty} \ln(R) = \infty$, das uneigentliche Integral existiert also nicht!)

(Weitere Beispiele in den Übungen.) An das letzte Bsp. schließt unmittelbar die Frage an, für welche $\alpha > 0$ das Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ in sinnvoller Weise zu erklären ist.

In der in (ii) beschriebenen Situation legen wir fest:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$ wenn f in a bzw.

$$\text{bzw } \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \,,$$ wenn f in b Probleme bereitet

falls diese Grenzwerte existieren. Mit dieser Definition ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_\varepsilon^1$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha}$$

<u>nur</u> für $\alpha < 1$

Auch hier existiert das Integral nicht für $\alpha = 1$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} -\ln(\varepsilon) = \infty \quad !$$