2. Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

Im folgenden betrachten wir stets Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x)$$

wobei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Offen bedeutet: Zu jedem $x \in \Omega$ existiert eine Kugel $K_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < \varepsilon\}$, die vollständig in Ω enthalten ist. Hierbei $\varepsilon > 0$ eine positive reelle Zahl – möglicherweise sehr klein –, die von x abhängt, und $|x-y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ der euklidische Abstand der Punkte x und y. (Die Offenheitsvoraussetzung erlaubt es uns, jeden Punkt von Ω aus jeder beliebigen Richtung anzunähern.)

2.1 Partielle Ableitungen

Um die partielle Differenzierbarkeit nach einer der unabhängigen Variablen x_k, $k \in \{1, \dots, n\}$ zu erklären, definieren wir die Hilfsfunktionen $\varphi_k : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \mathbb{R}$:

$$\varphi_k(t) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

wobei $x_1, \dots, x_n$ (vorübergehend) festgehalten werden.

Def.: Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt in $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ partiell differenzierbar nach x_k, wenn die Hilfsfunktion φ_k in $t = 0$ differenzierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) := \varphi'(0).$$

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$ wird als partielle Ableitung von f nach x_k in $x \in \Omega$ bezeichnet.

Bem.: Man betrachtet die Komponenten $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots x_n$ (vorübergehend) als Parameter und bildet die Ableitung nach der Komponente x_k.

Bsp.:

(1) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_4) \longmapsto f(x) = x_1 x_2 + x_3^2 + x_4^3$.

Hierfür ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = x_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}(x) = 2x_3$

und schließlich $\frac{\partial f}{\partial x_4}(x) = 3x_4^2$.

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto f(x,y) = x \cdot e^y$

$\rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cdot e^y$.

(3) Die Variablen müssen nicht immer mit $x, y, (z)$ oder $(x_1, \dots, x_n)$ bezeichnet sein, ebenso ist möglich

$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $(r,s) \longmapsto f(r,s) = r^s$

$\rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial r}(r,s) = \frac{\partial}{\partial r} \exp(s \cdot \ln(r)) = \exp(s \cdot \ln(r)) \cdot \frac{s}{r}$

$= s \cdot r^{s-1}$; $\frac{\partial f}{\partial s}(r,s) = \frac{\partial}{\partial s} \exp(s \cdot \ln(r)) = \ln(r) \cdot r^s$.

(4) Die Cobb-Douglas-Funktionen ($\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, x_k > 0 \ \forall k\}$) ²⁄

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n} = \prod_{k=1}^{n} x_k^{s_k}$$

mit festen reellen Exponenten $s_1, \dots, s_n$ spielt in verschiedenen Modellen der WWen eine Rolle. Für ihre partiellen Ableitungen erhalten wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_1^{s_1} \dots x_k^{s_k} \dots x_n^{s_n}\right) = x_1^{s_1} \dots x_{k-1}^{s_{k-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} x_k^{s_k}\right) x_{k+1}^{s_{k+1}} \dots x_n^{s_n}$$

$$= s_k \cdot \frac{1}{x_k} \cdot x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} = \frac{s_k}{x_k} \cdot f(x).$$

Ist $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n, x_k > 0 \ \forall k \in \{1, \dots, n\}\}$ und

$f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ eine nach jeder Variablen partiell

differenzierbare Funktion, so können wir

<u>partielle Elastizitäten</u> $\varepsilon_{f,x_j}(x) := \frac{x_j}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$

ganz analog zum eindimensionalen Fall einführen.

Bsp.: Cobb-Douglas. $f(x) = \prod_{k=1}^{n} x_k^{s_k}$ mit

$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{s_k}{x_k} \cdot f(x)$ wie oben berechnet.

Hierfür ist die partielle Elastizität bezüglich der k-ten Variablen gegeben durch

$$\varepsilon_{f,x_k}(x) = \frac{x_k}{f(x)} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{x_k}{f(x)} \cdot \frac{s_k}{x_k} \cdot f(x) = s_k .$$

Ist eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ in jedem Punkt $x \in \Omega$ nach der Variablen x_k diff'bar, erhalten wir eine Funktion

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : \mathbb{R}^n \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(x),$$

diese wird als partielle Ableitung von f nach x_k bezeichnet. Ist diese ebenfalls nach einer der Variablen, sagen wir x_j, differenzierbar, und das in jedem Punkt $x \in \Omega$, können wir die zweite partielle Ableitung von f nach x_k und x_j bilden. Also:

Def.: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} := \dfrac{\partial}{\partial x_j} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ heißt die zweite partielle Ableitung von $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ nach den Variablen x_k und x_j.

Hierfür gilt der Satz von Schwarz: Ist f zweimal partiell diffbar nach x_k und x_j und sind die zweiten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \quad \text{stetig},$$

so stimmen sie überein. Es gilt dann also $\forall x \in \Omega$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x).$$

(Dies wird bei allen für uns relevanten Funktionen der Fall sein.)

Bsp.: Cobb-Douglas Funktion. Wir wissen bereits:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{s_k}{x_k} \cdot f(x)$$

Um die zweite Ableitung nach x_j zu bestimmen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

(i) $k \neq j$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{s_k}{x_k} \cdot f(x)$

$$\underset{(k \neq j)}{=} \frac{s_k}{x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{s_k s_j}{x_k x_j} f(x)$$

(ii) Für $k = j$ ist die Produktregel zu verwenden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) = s_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{x_k} \cdot f(x)\right) = s_k\left(-\frac{1}{x_k^2} + \frac{s_k}{x_k^2}\right) \cdot f(x)$$

$$= s_k(s_k - 1) \cdot \frac{f(x)}{x_k^2}$$

Zsf.: Mit $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$ können wir das Zsf. zu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x) = (s_k s_j - s_k \delta_{kj}) \frac{f(x)}{x_k x_j}.$$