

Nachklausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler (A)

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (ausser Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Extremwertaufgabe 1 D)	6 Punkte
A3 (Analyse des Wachstumsverhaltens einer Funktion)	10 Punkte
A4 (Integration)	10 Punkte
A5 (partielle Ableitungen und Elastizitäten, Richtungsableitung)	7 Punkte
A6 (Extremwertaufgabe 2 D)	16 Punkte

Bei den Aufgaben 1,3,4 und 5 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. **Es empfiehlt sich also im besonderen Masse, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden.** Die Klausur gilt mit 23 (von 59 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Die Umkehrfunktion einer streng monoton steigenden, konvexen Funktion ist ebenfalls konvex.

Antwort: richtig falsch Enthaltung (2/1/0 P.)

(b) Jede monotone Funktion ist stetig.

Antwort: richtig falsch Enthaltung (2/1/0 P.)

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ ist genau dann streng monoton fallend, wenn $a \in (0, 1)$ ist.

Antwort: richtig falsch Enthaltung (2/1/0 P.)

(d) Jede konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar.

Antwort: richtig falsch Enthaltung (2/1/0 P.)

(e) Für die Elastizität zweier differenzierbarer Funktionen $f, g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ gilt die Quotientenregel $\varepsilon_{\frac{f}{g}}(x) = \varepsilon_f(x) - \varepsilon_g(x)$.

Antwort: richtig falsch Enthaltung (2/1/0 P.)

2. (4+2 P.) Gegeben sei ein Polynom

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \quad b \neq 0.$$

P sei ungerade und besitze in $x_0 = -2$ eine Nullstelle.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von P .

• P ungerade $\Rightarrow a = c = e = 0$ 1P.

(also $P(x) = bx^3 + dx$);

• $0 = P(-2) = (-2)(4b + d)$

$\Rightarrow d = -4b$ 1P.

(also $P(x) = b(x^3 - 4x)$)

• $P'(x) = b(3x^2 - 4)$ 1P.

es folgt $P'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x \in \left\{ \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \right\}$ 1P.

(Die kritischen Stellen sind also $x_{\pm} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.)

(b) Unter welcher - möglichst allgemeinen - Voraussetzung an b handelt es sich bei der größten kritischen Stelle von P um eine isolierte lokale Minimalstelle?

• $P''(x) = 6bx$ 1P.

• $P''(x_+) = 6b \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot b$

Ein isoliertes lokales Min. liegt also

bei x_+ vor, wenn $b > 0$ ist. 1P.

3. (3+3+4 P.) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = \ln(1 + (x-1)^2)$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich.

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{1+(x-1)^2} \quad (\text{Kettenregel}) \quad 1P.$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{(1+(x-1)^2)^2} (1+(x-1)^2 - 2(x-1)^2) \quad (\text{Quotientenr.}) \quad 1P \\ &= \frac{2(1-(x-1)^2)}{(1+(x-1)^2)^2} \quad (\text{Zsf.}) \quad 1P. \end{aligned}$$

(b) Geben Sie die Nullstellen von f' und f'' an.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad 1P.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \vee x = 2 \end{cases} \quad 1P.$$

(c) Bestimmen Sie das jeweils grösste Teilintervall von \mathbb{R} , auf dem f

(i) progressiv fallend, $(-\infty, 0]$ 1P.

(ii) degressiv wachsend, $[2, \infty)$ 1P.

(iii) degressiv fallend bzw. $[0, 1]$ 1P.

(iv) progressiv wachsend ist. $[1, 2]$ 1P.

(Kein Punktabzug bei offenen oder halb offenen Intervallen.)

4. (3+3+4 P.) Berechnen Sie:

(a) eine Stammfunktion von $f(x) = xe^{2x}$,

$$\int x e^{2x} dx = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2x};$$

f' g'

Wichtig: Endergebnis richtig: 3 P.,

sonst je ein Punkt für

- Kenntnis der Regel der part. Int.,
- $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$

(b) das bestimmte Integral $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3} dx$,

$$= \int_0^1 (x+1)^{-2} dx - \int_0^1 (x+1)^{-3} dx \quad 1P.$$

$$= -\frac{1}{x+1} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} \Big|_0^1 \quad 1P.$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad 1P.$$

(c) den Mittelwert von $f(x) = xe^{-x^2}$ auf dem Intervall $[-3, 3]$.

$$\int f(x) dx = \int x \cdot e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{f'(x)} \frac{e^{-x^2}}{f(x)} dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \quad 2P.$$

$$\text{Mittelwert} = \frac{1}{6} \int_{-3}^3 f(x) dx \quad 1P.$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_{-3}^3 = 0 \quad 1P.$$

(Was aus f ungerade auf symm. Intervall direkt den Mittelwert 0 abliest, erhält auch diese 4 Pkte.)

5. (2+2+³/₄ P.) Gegeben sei die Funktion

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := x^y.$$

Berechnen Sie

(a) die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1} \quad 1P.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \ln(x) \cdot x^y \quad 1P.$$

(b) die partiellen Elastizitäten

$$\varepsilon_{f,x}(x, y) = \frac{y}{x} \quad 1P.$$

$$\varepsilon_{f,y}(x, y) = y \cdot \ln(x) \quad 1P.$$

(c) und die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0, y_0)$ nach $\xi = \frac{1}{5}(3, 4)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 5)$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \xi \rangle \quad 1P.$$

$$= \frac{1}{5} (3 y_0 x_0^{y_0-1} + 4 \ln(x_0) \cdot x_0^{y_0}) \quad 1P.$$

$$= \frac{5 \cdot 3}{5} = 3 \quad 1P.$$

6. (3+3+3+2+1+4 P.) Für $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ sei $f(x, y) = \sqrt{x} - x + \sqrt[3]{y} - 3y$.

(a) Berechnen Sie $\nabla f(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} - 3, \quad 2P.$$

$$\text{also: } \nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 1, \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} - 3 \right) \quad 1P.$$

(b) Zeigen Sie, dass f genau eine kritische Stelle besitzt, und bestimmen Sie diese.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad 1P$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow y^{-\frac{2}{3}} = 9 \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}} \quad 1P$$

1P
krit. Stelle:
$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{27}\right)$
1P

(c) Berechnen Sie $\text{Hess}f(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{2}{9}y^{-\frac{5}{3}} \quad 2P.$$

(offenbar ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$ und daher)

$$\text{Hess}f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9}y^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix} \quad 1P.$$

(d) Untersuchen Sie $\text{Hess}f(x, y)$ auf Definitheit. Formulieren Sie eine Aussage und begründen Sie diese. Ihr Ergebniss sollte unabhängig von (x, y) sein.

$\text{Hess}f(x, y)$ ist negativ definit. 1P

Begründung: Beide Eigenwerte (hier: = Diagonalelemente) sind negativ. 1P

(e) Liegt in der kritischen Stelle aus Aufgabenteil (b) ein lokales Extremum vor? Falls ja, bestimmen Sie dessen Typ. Ja, ein lokales Maximum,

(folgt aus (b) und (d)) 1P.

(f) Bestimmen Sie $\sup \{f(x, y) : (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)\}$ sowie $\inf \{f(x, y) : (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)\}$ und entscheiden Sie, ob es sich hierbei um ein Maximum bzw. um ein Minimum handelt.

$$\sup \{f(x, y) : \dots\} = \max \{f(x, y) : \dots\} \quad 1P$$

$$= f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{27}\right) = \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{17}{36} \quad 1P.$$

$$\inf \{f(x, y) : \dots\} = -\infty \quad 1P$$

Ein Minimum existiert nicht. 1P.