Lösung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2014
22.09.2014

Nachklausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler (B)

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (ausser Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Extremwertaufgabe 1 D)	6 Punkte
A3 (Analyse des Wachstumsverhaltens einer Funktion)	10 Punkte
A4 (Integration)	10 Punkte
A5 (partielle Ableitungen und Elastizitäten, Richtungsableitung)	7 Punkte
A6 (Extremwertaufgabe 2 D)	16 Punkte

Bei den Aufgaben 1,3,4 und 5 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. **Es empfiehlt sich also im besonderen Masse, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden.** Die Klausur gilt mit 23 (von 59 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   (a) Die Umkehrfunktion einer streng monoton fallenden, konvexen Funktion ist ebenfalls konvex.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (b) Jede stetige Funktion ist monoton.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^x$ ist genau dann streng monoton steigend, wenn $a > 1$ ist.
   Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (d) Jede konkave Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

   (e) Für die Elastizität zweier differenzierbarer Funktionen $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ gilt die Produktregel $\varepsilon_{f \cdot g}(x) = \varepsilon_f(x) \cdot \varepsilon_g(x)$.
   Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

2. **(4+2 P.)** Gegeben sei ein Polynom

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \qquad (a \neq 0).$$

P sei gerade mit $P(0) = 0$ und besitze in $x_0 = 2$ ein lokales Extremum.

(a) Bestimmen Sie alle von Null verschiedenen Nullstellen von P.

• P gerade $\Rightarrow b = d = 0$, $P(0) = 0 \Rightarrow e = 0$ 1P.

(also: $P(x) = ax^4 + cx^2$)

• $P'(x) = 4ax^3 + 2cx$ 1P.

• $0 = P'(2) = 4a \cdot 8 + 4c \Rightarrow c = -8a$ 1P.

(also $P(x) = a(x^4 - 8x^2)$)

• $0 = P(x) = ax^2(x^2 - 8) \wedge x \neq 0$

also genau dann, wenn $x = \pm\sqrt{8}$ 1P.

($a = 0$ ist ja ausgeschlossen.)

(b) Unter welcher - möglichst allgemeinen - Voraussetzung an a handelt es sich bei x_0 um eine isolierte lokale Maximalstelle?

• $P''(x) = 12ax^2 + 2c = a(12x^2 - 16)$ 1P.

• $P''(2) = a(12 \cdot 4 - 16) = 32a$

Also $P''(2) < 0 \Leftrightarrow a < 0$, unter dieser Voraussetzung gibt es also in $x_0 = 2$ ein isoliertes lokales Maximum. 1P.

3. (3+3+4 P.) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = \ln\left(1 + (x+1)^2\right)$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich.

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{1+(x+1)^2}$$ 1P.

$$f''(x) = \frac{2}{\left(1+(x+1)^2\right)^2}\left(1-(x+1)^2\right)$$ 2P.

(b) Geben Sie die Nullstellen von f' und f'' an.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ 1P

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ 1P

$\vee \; x = 0$ 1P.

(c) Bestimmen Sie das jeweils grösste Teilintervall von $\mathbb{R}$, auf dem f

(i) progressiv fallend, $(-\infty, -2]$ 1P.

(ii) degressiv wachsend, $[0, \infty)$ 1P.

(iii) degressiv fallend bzw. $[-2, -1]$ 1P.

(iv) progressiv wachsend ist. $[-1, 0]$ 1P

(Kein Punktabzug bei offenen oder halboffenen Intervallen.)

4. (3+3+4 P.) Berechnen Sie:

(a) eine Stammfunktion von $f(x) = xe^{3x}$,

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) e^{3x}$$

Wertung: 3P. für richtiges Ergebnis, sonst:

bei Kenntnis der part. Int... 1P

Stammfkt. e^{3x} 1P.

(b) das bestimmte Integral $\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^3} dx$,

$$= \int_0^1 (x+1)^{-2} dx - 2 \int_0^1 (x+1)^{-3} dx \qquad 1P.$$

$$= - \frac{1}{x+1} \Big|_0^1 + \frac{1}{(1+x)^2} \Big|_0^1 \qquad 1P.$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4} \qquad 1P.$$

(c) den Mittelwert von $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ auf dem Intervall $[-2, 2]$.

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx = \int \underbrace{2x}_{\varphi'(x)} (1 + \underbrace{x^2}_{\varphi(x)})^{-2} dx$$

$$= -(1+x^2)^{-1} \qquad 2P.$$

$$\text{Mittelwert} = \frac{1}{4} \cdot \int_{-2}^{2} f(x) dx \qquad 1P$$

$$= \left[-\frac{1}{4} (1+x^2)^{-1} \right]_{-2}^{2} = 0 \qquad 1P.$$

(Wer aus "f ungerade auf symm. Intervall" direkt den Mittelwert 0 abliest, erhält auch diese 4 Pkte.)

5. **(2+2+3 P.)** Gegeben sei die Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := y^x.$$

Berechnen Sie

(a) die partiellen Ableitungen

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$ $\ln(y) \cdot y^x$ 1P.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$ $x\, y^{x-1}$ 1P.

(b) die partiellen Elastizitäten

$\varepsilon_{f,x}(x,y) =$ $x \cdot \ln(y)$ 1P.

$\varepsilon_{f,y}(x,y) =$ x 1P.

(c) und die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0,y_0)$ nach $\xi = \frac{1}{5}(3,4)$ im Punkt $(x_0,y_0) = (5,1)$

$\frac{\partial f}{\partial \xi}(x_0,y_0) =$ $\langle \nabla f(x_0, y_0), \xi \rangle$ 1 P.

$= \frac{1}{5} \left(3 \ln(y_0)\, x_0 + 4 x_0\, y_0^{x_0 - 1}\right)$ 1P

$= \frac{1}{5} \cdot 4 \cdot 5 = 4$ 1P.

6. (3+3+3+2+1+4 P.) Für $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ sei $f(x, y) = \sqrt[3]{x} - 3x + \sqrt{y} - y$.

(a) Berechnen Sie $\nabla f(x, y)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 3\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - 1 \qquad 2P$$

also: $\nabla f(x,y) = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 3,\ \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} - 1\right)$ 1P.

(b) Zeigen Sie, dass f genau eine kritische Stelle besitzt, und bestimmen Sie diese.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \iff x = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \qquad 2P.$$

also (x,y) kritisch $\iff (x,y) = \left(\frac{1}{27}, \frac{1}{4}\right)$. 1P.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{Hess} f(x, y)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}} \qquad 2P$$

$$\mathrm{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}x^{-5/3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \qquad 1P.$$

(d) Untersuchen Sie $\mathrm{Hess} f(x, y)$ auf Definitheit. Formulieren Sie eine Aussage und begründen Sie diese. Ihr Ergebniss sollte unabhängig von (x, y) sein.

Hess $f(x,y)$ ist negativ definit, 1P.

denn: alle Eigenwerte (hier: = Diagonalelemente) sind negativ. 1P

(e) Liegt in der kritischen Stelle aus Aufgabenteil (b) ein lokales Extremum vor? Falls ja, bestimmen Sie dessen Typ. lokales Maximum (folgt aus (b) und (d)) 1P.

(f) Bestimmen Sie $\sup \{f(x, y) : (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)\}$ sowie $\inf \{f(x, y) : (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)\}$ und entscheiden Sie, ob es sich hierbei um ein Maximum bzw. um ein Minimum handelt.

$\sup \{f(x,y) : \ldots\} = \max \{f(x,y) : \ldots\}$ 1P

$= f\left(\frac{1}{27}, \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{36}$ 1P.

$\inf \{f(x,y) : \ldots\} = -\infty$ 1P.

Ein Minimum existiert nicht. 1P.