

## Klausur zu Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler (B)

**Allgemeine Hinweise:** Als Hilfsmittel ist (ausser Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Definitionen)	9 Punkte
A3 (Extremwertaufgabe)	14 Punkte
A4 (Analyse des Wachstumsverhaltens einer Funktion)	10 Punkte
A5 (Bestimmung von Funktionen gegebener Elastizität)	7 Punkte
A6 (partielle Ableitungen und Elastizitäten)	8 Punkte

Bei den Aufgaben 1,2,4, 5 (b) und 6 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. **Es empfiehlt sich also im besonderen Masse, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden.** Die Klausur gilt mit 23 (von 58 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Die Umkehrfunktion einer streng konkaven Funktion ist ebenfalls streng konkav.

Antwort: richtig  falsch  Enthaltung  (2/1/0 P.)

(b) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  monoton, so ist  $f$  beschränkt.

Antwort: richtig  falsch  Enthaltung  (2/1/0 P.)

(c) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , so ist  $f$  injektiv.

Antwort: richtig  falsch  Enthaltung  (2/1/0 P.)

(d) Ist  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  im gesamten Definitionsbereich elastisch, so ist  $f$  streng monoton.

Antwort: richtig  falsch  Enthaltung  (2/1/0 P.)

(e) Für die Elastizität einer differenzierbaren Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  und eine reelle Zahl  $a > 0$  gilt die Faktorregel  $\varepsilon_{af}(x) = a\varepsilon_f(x)$ .

Antwort: richtig  falsch  Enthaltung  (2/1/0 P.)

2. (1+2+1+1+2+2 P.) Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Ergänzen Sie die folgenden Definitionen:

(a)  $f$  heisst *stetig* in  $x_0 \in I$ , wenn gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad 1P.$$

(b)  $f$  heisst *differenzierbar* in  $x_0 \in I$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x_0+h) - f(x_0)) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) \quad 1P.$$

existiert. In diesem Fall heisst  $f'(x_0)$

$$\text{die Ableitung von } f \text{ in } x_0. \quad 1P.$$

(c)  $f$  heisst *gerade*, falls

$$f(x) = f(-x) \quad \text{für alle } x \in I. \quad 1P.$$

(Hierbei wird vorausgesetzt, dass  $I$  symmetrisch zum Nullpunkt ist.)

(d)  $f$  heisst *streng monoton fallend*, wenn

$$f(x) > f(y) \quad \text{für alle } x, y \in I \quad \text{mit } x < y.$$

$\lambda \in [0, 1]$  analog,

(e)  $f$  heisst *konvex*, falls für alle  $x, y \in I$  und für alle  $\lambda \in (0, 1)$  gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \quad 1P.$$

( " $>$ " :  $-\frac{1}{2}$  P.)

(f)  $f$  heisst *degressiv wachsend*, wenn  $f$  monoton wachsend  $1P$

$$\text{und konkav ist.} \quad 1P.$$

3. (1+3+3+3+4 P.) Gegeben sei die Funktion

$$f: [-5, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := (x^2 - 6x + 1)e^{-x}.$$

(a) Bestimmen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  1P.

(b) Berechnen Sie  $f'(x)$ . Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, dass die Nullstellen von  $f'$  ablesbar sind.

$$f'(x) = (2x - 6 - (x^2 - 6x + 1))e^{-x} \quad 1P.$$

$$= -(x^2 - 8x - 7)e^{-x}, \quad 1P.$$

$$= -(x-7)(x+1) \cdot e^{-x} \quad 1P.$$

(c) Geben Sie das grösste Intervall an, auf dem  $f$  streng monoton steigt.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-7)(x+1) < 0 \quad 1P.$$

$$\Leftrightarrow x-7 < 0 < x+1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 7 \quad 1P.$$

$\Rightarrow f$  ist streng monoton steigend auf  $[-1, 7]$  ④ 1P.

(d) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen und Extrema von  $f$  sowie deren Typ. (Die Funktionswerte sollen angegeben, die Potenzen von  $e$  dabei nicht ausgerechnet werden.)

lok. Maximalstelle:  $x_0 = -5$  mit  $f(x_0) = 56 \cdot e^5$  1P.

" Minimalstelle:  $x_1 = 1$  "  $f(x_1) = -4e^{-1}$  1P.

" Maximalstelle:  $x_2 = 7$  "  $f(x_2) = 8 \cdot e^{-7}$  1P.

(e) Bestimmen Sie  $\sup\{f(x) : x \geq -5\}$  und  $\inf\{f(x) : x \geq -5\}$ . Entscheiden Sie, ob es sich hierbei um ein Maximum bzw. ein Minimum handelt, und geben Sie gegebenenfalls die Extremalstellen an.

$$\sup_x f(x) = \max_x f(x) = f(-5) = 56e^5 \quad 2P.$$

$$\inf_x f(x) = \min_x f(x) = f(1) = -4 \cdot e^{-1} \quad 2P.$$

④ offenes Intervall: kein Punktabzug.

④

4. (3+3+4 P.) Für  $x \geq 0$  sei  $f(x) = e^{4x - \frac{x^2}{2}}$ .

(a) Berechnen Sie  $f'(x)$  und  $f''(x)$ . Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich.

$$f'(x) = e^{4x - \frac{x^2}{2}} (4 - x) \quad 1P.$$

$$f''(x) = e^{4x - \frac{x^2}{2}} (4 - x)^2 + e^{4x - \frac{x^2}{2}} \cdot (-1) \quad 1P.$$

$$= e^{4x - \frac{x^2}{2}} ((4 - x)^2 - 1) \quad \text{ausmultiplizieren ist auch ok.}$$

$$\text{oder} \quad = e^{4x - \frac{x^2}{2}} (x - 3)(x - 5) \quad 1P.$$

(b) Geben Sie die Nullstellen von  $f'$  und  $f''$  an.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \quad 1P.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad 1P.$$

$$\text{oder } x = 5 \quad 1P.$$

(c) Bestimmen Sie das jeweils grösste Teilintervall von  $[0, \infty)$ , auf dem  $f$

(i) progressiv fallend,

$$[4, 5] \quad 1P.$$

(ii) degressiv wachsend,

$$[3, 4] \quad 1P.$$

(iii) degressiv fallend bzw.

$$[5, \infty) \quad 1P.$$

(iv) progressiv wachsend ist.

$$[0, 3] \quad 1P.$$

((halb-)offene Intervalle: kein Punktabzug.)

5. (5+2 P.) (a) Bestimmen Sie jeweils eine Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , so dass für die Elastizität dieser Funktion  $\varepsilon_f(x) = h(x)$  gilt, wobei

(i)  $h(x) = x^2 e^{x^2}$ , bekannt:  $f(x) = \exp\left(\int \frac{h(x)}{x} dx\right)$ . 1P

zsg.  $\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2}$  1P

also  $f(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \exp(x^2)\right)$  1P

(oder ein Vielfaches)

(ii)  $h(x) = 5x$ .

$\int 5 dx = 5x$  1P

$\Rightarrow f(x) = (C \cdot) e^{5x}$  1P

- (b) Gesucht ist eine Funktion  $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ , für die  $\varepsilon_{f,x}(x, y) = \frac{4}{3}$  und  $\varepsilon_{f,y}(x, y) = 3$  ist.

$f(x, y) = (C \cdot) x^{\frac{4}{3}} y^3$  2P

6. (2+2+4 P.) Gegeben sei die Funktion

$$f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) := y^x.$$

Berechnen Sie

$$= \exp(x \cdot \ln(y))$$

(a) die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \ln(y) \cdot y^x \quad 1P.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x y^{x-1} \quad 1P.$$

(b) die partiellen Elastizitäten

$$\varepsilon_{f,x}(x, y) = x \cdot \ln(y) \quad 1P.$$

$$\varepsilon_{f,y}(x, y) = x \quad 1P.$$

(c) und alle zweiten partiellen Ableitungen von  $f$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (\ln(y))^2 \cdot y^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (\ln(y) y^x) = y^{x-1} + \ln(y) \cdot x y^{x-1}$$

$$= y^{x-1} (1 + x \cdot \ln(y)) \quad 2P.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x(x-1) y^{x-2} \quad 1P.$$