Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2013
16.09.2013

NACHKLAUSUR A ZU MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Hier sind nur die Antworten "richtig" oder "falsch" oder Enthaltungen möglich.
Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(0) = 0$, so besitzt f im Nullpunkt ein lokales Extremum.

Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(b) Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum an.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(c) Besitzt eine symmetrische Matrix keinen negativen Eigenwert, so ist sie positiv definit.

Antwort: richtig ◯ falsch ⊗ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(d) Die Ableitung einer differenzierbaren ungeraden Funktion ist gerade.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

(e) Die Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist isoelastisch.

Antwort: richtig ⊗ falsch ◯ Enthaltung ◯ (2/1/0 P.)

Bitte wenden!

A 2: $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$ $(x > 0)$

(a) Berechne $f'(x)$ und $\varepsilon_f(x)$!

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^3)^2}\left(1+x^3 - x \cdot 3x^2\right)$$ (Quotientenregel 1P.)

$$= \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$$ (1P.)

$$\varepsilon_f(x) = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$$ (Def. 1P.)

$$\underset{\text{hier}}{=} \frac{x \cdot (1-2x^3)}{(1+x^3)^2} \cdot \frac{1+x^3}{x} = \frac{1-2x^3}{1+x^3}$$ (1P)

(b) Wo ist f unelastisch? Dies ist genau dann der Fall, wenn $|\varepsilon_f(x)| < 1$ (1P.)

Nun ist für alle $x > 0$ $\varepsilon_f(x) = \frac{1-2x^3}{1+x^3} < 1$ und

$$\varepsilon_f(x) = \frac{1-2x^3}{1+x^3} > -1 \Leftrightarrow 1-2x^3 > -(1+x^3) \Leftrightarrow 2x^3-1 < 1+x^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 < 2 \Leftrightarrow x < \sqrt[3]{2}$$

Also: f unelastisch auf $(0, \sqrt[3]{2})$ (2P.)

(c) Monotonie: $f'(x) = \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2} \gtreqqless 0 \Leftrightarrow 1-2x^3 \gtreqqless 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \gtreqqless x^3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \gtreqqless x$$ (1P.)

Also: f auf $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$ streng monoton steigend

und auf $[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \infty)$ " " fallend (1P.)

(d) Aus (c) folgt ② Forts. A2:

$$\max\{f(x) : x>0\} = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}(1+2)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}} \quad (1P.)$$

Da $f(x)>0\ \forall x>0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ (oder $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$),

gilt $\inf\{f(x) : x>0\}=0$. (1P.)

(Begründung / Rechnung nicht erforderlich)

(e) $f''(x) = \frac{d}{dx}\ \frac{1-2x^3}{(1+x^3)^2}$

$$= \frac{1}{(1+x^3)^4}\left(-6x^2(1+x^3)^2 - (1-2x^3)\cdot 2(1+x^3)\cdot 3x^2\right) \quad (1P.)$$

$$= \frac{6x^2}{(1+x^3)^3}\left(2x^3-1 - 1-x^3\right) \quad (1P.)$$

$$= \frac{6x^2}{(1+x^3)^3}\cdot(x^3-2) \quad (1P.)$$

(f) Wo fällt f progressiv? Wenn $-f'(x) \geq 0 \geq f''(x)$ ist,

(Für die Kenntnis der Kriterien 1P.)

d. i. wenn $x^3-2 \leq 0 \leq 2x^3-1$, d. h. wenn

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \leq x \leq \sqrt[3]{2} \text{ ist.} \quad (2P.)$$

Also: f fällt progressiv auf $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right]$ (1P.)

(das offene oder ein halboffenes Intervall wird ebenfalls akzeptiert.)

A3 $f(x) = \frac{4+3e^x}{1+e^x}$ (Mathe f. Winis, Lösung + Wertung)

(a) Grenzwerte (Rechnung nicht erforderlich, müssen wir auch nicht checken.)

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$ (1P.)

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$ (1P.)

(b) $f'(x) = \frac{1}{(1+e^x)^2} \left(3e^x(1+e^x) - (4+3e^x)e^x \right)$ (1P.)

$= \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ (1P.)

Folgerung: • $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, f ist streng monoton fallend auf ganz $\mathbb{R}$ (1P.)

• es existieren keine lokalen Extrema (1P.)

(c) $f''(x) = \frac{1}{(1+e^x)^4} \left(-e^x(1+e^x)^2 + e^x \cdot 2(1+e^x) \cdot e^x \right)$ (1P.)

$= \frac{e^x}{(1+e^x)^3} \left(2e^x - 1 - e^x \right) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$ (1P.)

(d) Auf $(0,\infty)$: $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ konvex auf $[0,\infty)$, (1P.)

auf $(-\infty,0)$: $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ konkav auf $(-\infty,0]$ (1P.)

A4 Integrale

(a) $\int e^{+2x-5}\,dx = \frac{1}{2} e^{2x-5}$ 2 P.)

(Wertung: $\int e^t\,dt = e^t$: 1 P., "$\frac{1}{\alpha}$"-Regel: 1 P.)

(b) $\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3}\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} - \int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ 1 P.

$= -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_1^\infty$ 1 P.

$= \frac{1}{2}$ 1 P.

(c) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$: Mittelwert auf $[-e,e]$?

$\int_{-e}^{e} f(x)\,dx = \int_{-e}^{e} \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2)\Big|_{-e}^{e}$ 2 P.

Logarithmisches Integral

1 P.

$= 0$

$\Rightarrow$ Mittelwert $= \frac{1}{2e}\cdot\int_{-e}^{e} f(x)\,dx = 0$ 1 P.

(Kann man auch ohne Rechnung sehen, da der Integrand ungerade und das Intervall symmetrisch um Null ist.)

(d) $\varepsilon_f(x) = 1+x \Leftrightarrow \frac{x\cdot f'(x)}{f(x)} = 1+x$ 1 P.

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}+1 \Leftrightarrow (\ln f)'(x) = \frac{1}{x}+1$ 1 P

$\Leftrightarrow \ln f(x) = \ln(x) + x + c \Leftrightarrow f(x) = C x\cdot e^x$ 2 P.

A5 (Extremwerte mehrdim.) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y) := x^2 e^x - y e^{-y^2}$

(a) Berechnung von $\nabla f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x^2+2x)e^x = x(x+2)e^x \qquad (1P.)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2y^2-1)e^{-y^2} \qquad (1P.)$$

Kritische Stellen: $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-2, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (je 1, also (4P.)

(b) Hesse-Matrix:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (x^2+4x+2)e^x \qquad (1P.)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (-4y^3+6y)e^{-y^2} = -2y(2y^2-3)e^{-y^2} \qquad (1P.)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \qquad (1P.)$$

und als Matrix:

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} (x^2+4x+2)e^x & 0 \\ 0 & -2y(2y^2-3)e^{-y^2} \end{pmatrix}$$

(1P.)

(Wer gleich die Hesse-Matrix richtig hinschreibt, erhält ebenfalls volle Punktzahl.)

weiter A5:

(c) lokale Extrema? In den krit. Stellen erhält man:

$$\text{Hess} f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{cases} \text{pos. def} \\ \text{indef.} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{lok. Min. in } \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{(2P.)} \\ \text{Sattelpunkt in } \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{(2P.)} \end{cases}$$

$$\text{Hess} f\left(-2, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{pmatrix} -2e^{-2} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2}\, e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{cases} \text{indef} \\ \text{neg. def.} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{Sattelpunkt in } \left(-2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{(2P.)} \\ \text{lok. Max in } \left(-2, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \text{(2P.)} \end{cases}$$

(d) Es existiert kein globales Maximum, (1P.)

denn: z.B. hat man $\lim_{x \to \infty} f(x,0) = \infty$ (1P.)