Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2013
16.09.2013

# NACHKLAUSUR A ZU MATHEMATIK FÜR WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLER II

**1.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Hier sind nur die Antworten "richtig" oder "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(0) = 0$, so besitzt $f$ im Nullpunkt ein lokales Extremum.

Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(b) Jede differenzierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Minimum an.

Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(c) Besitzt eine symmetrische Matrix keinen negativen Eigenwert, so ist sie positiv definit.

Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(d) Die Ableitung einer differenzierbaren ungeraden Funktion ist gerade.

Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

(e) Die Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt[7]{x}$ ist isoelastisch.

Antwort: richtig ○ falsch ○ Enthaltung ○ (2/1/0 P.)

Bitte wenden!

**2.** Für $x \in (0, \infty)$ sei $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^3}$.

(a) Berechnen Sie $f'(x)$ und die Elastizität $\varepsilon_f(x)$. (4 P.)

(b) Bestimmen Sie das größte Intervall $I \subset (0, \infty)$, auf dem $f$ unelastisch ist. (3 P.)

(c) Bestimmen Sie die größten Teilintervalle von $(0, \infty)$, auf denen $f$ monoton steigend bzw. monoton fallend ist. (2 P.)

(d) Bestimmen Sie das Maximum und das Infimum von $f$ auf $(0, \infty)$. (2 P.)

(e) Berechnen Sie $f''(x)$ und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich. (3 P)

(g) Ermitteln Sie das größte Intervall $I \subset (0, \infty)$, auf dem $f$ progressiv fällt. (4 P.)

**3.** Für $x \in \mathbb{R}$ sei die spezielle logistische Funktion $f(x) = \dfrac{4 + 3e^x}{1 + e^x}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$. (2 P.)

(b) Berechnen Sie $f'(x)$. Welche Konsequenzen ergeben sich hieraus für das Monotonieverhalten und die Existenz lokaler Extrema von $f$? (4 P.)

(c) Berechnen Sie $f''(x)$ und vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich. (2 P.)

(d) Untersuchen Sie, auf welchen Teilintervallen der reellen Achse die Funktion $f$ konvex bzw. konkav ist. (2 P.)

**4.** Berechnen Sie:

(a) eine Stammfunktion von $f(x) = e^{2x-5}$, (2 P.)

(b) das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x^3} dx$, (3 P.)

(c) den Mittelwert von $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ auf dem Intervall $[-e, e]$, (4 P.)

(d) eine Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ mit der Elastizität $\varepsilon_f(x) = 1 + x$. (4 P.)

**5.** Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2 e^x - y e^{-y^2}$.

(a) Berechnen Sie $\nabla f(x, y)$ und finden Sie alle kritischen Stellen von $f$. (6 P.)

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Hess} f(x, y)$. (4 P.)

(c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von $f$ und deren Typ. (8 P.)

(d) Untersuchen Sie, ob $f$ ein globales Maximum besitzt. (2 P.)

Die Klausur gilt mit 32 Punkten als bestanden. Viel Erfolg!