Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

(Analysis, SoSe 2014)

1. Analysis der Funktionen einer Veränderlichen

1.1 Der Funktionsbegriff und erste Beispiele

Zunächst sei erinnert an den Begriff der Funktion bzw. der Abbildung:

Def.: X und Y seien Mengen. Eine Funktion f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

Schreibweise: $f: X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ (=... Zuordnungsvorschrift)

Bez. / Bem.:

- X heißt Definitionsbereich, Y Zielbereich von f.
- Der Wertebereich $R(f)^{(*)} := \{f(x) : x \in X\}$ ist im Allgemeinen eine echte Teilmenge des Zielbereichs.
- Die vollständige Angabe einer Funktion enthält alle drei Komponenten: X, Y und die Zuordnungsvorschrift. Abbildungen mit derselben Zuordnungsvorschrift aber verschiedenen Definitions- bzw. Zielbereichen können sich in wesentlichen Eigenschaften unter-

---

(*) Häufig auch Bild(f) oder Im(f)

scheiden.

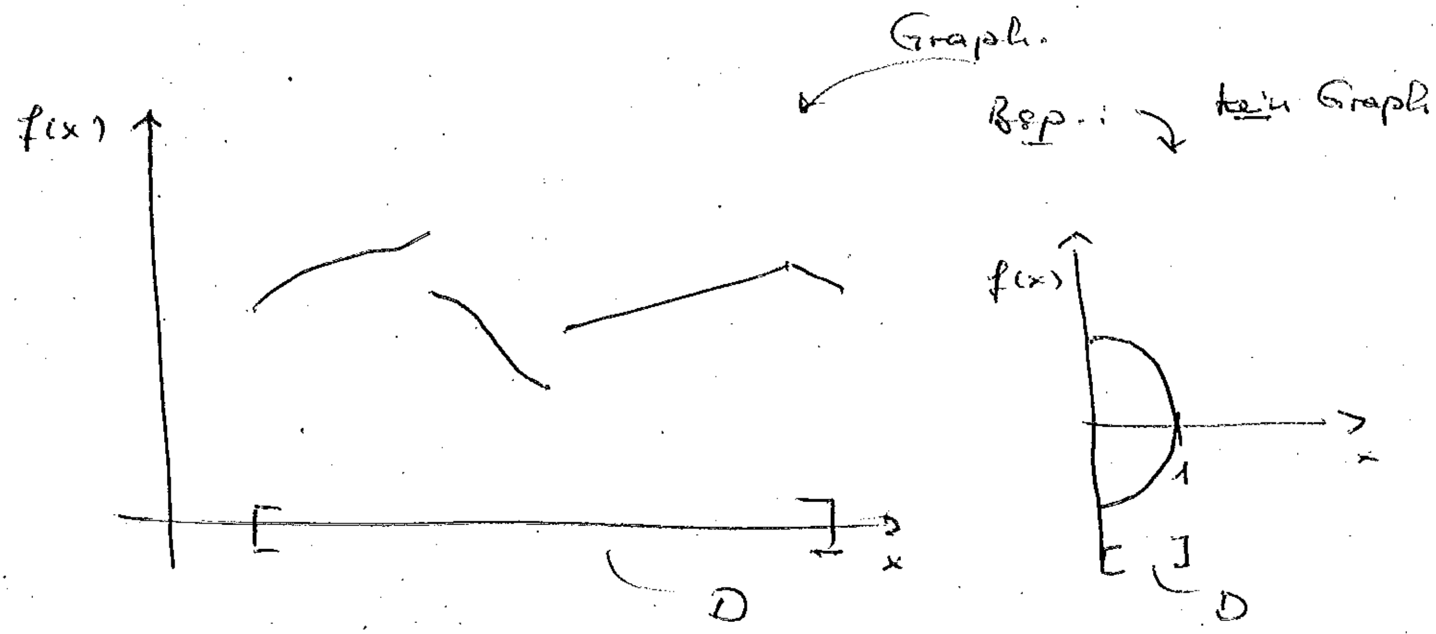
- In diesem Kapitel (in aller Regel):

$X = D \subset \mathbb{R}$ (meist wird D ein Intervall I sein),

$Y = \mathbb{R}$ (oder eine Teilmenge davon).

Solche Funktionen heißen "reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen". Man kann sie veranschaulichen mit Hilfe des Graphen

$$G_f := \{(x,y) \in D \times \mathbb{R} : y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D\}$$



Erinnerung: injektiv, surjektiv, bijektiv

Diese Eigenschaften sind abhängig vom Definitions- und Zielbereich. Bsp. $f(x) = x^2$ mit unterschiedlichen Definitions- und Zielbereichen.

Eine einfache, aber wichtige Klasse von Funktionen bilden die affin-linearen Funktionen:

Def.: Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ fest (sog. Parameter). Dann heißt die Funktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := ax + b$$

eine <u>affin-lineare</u> Funktion.

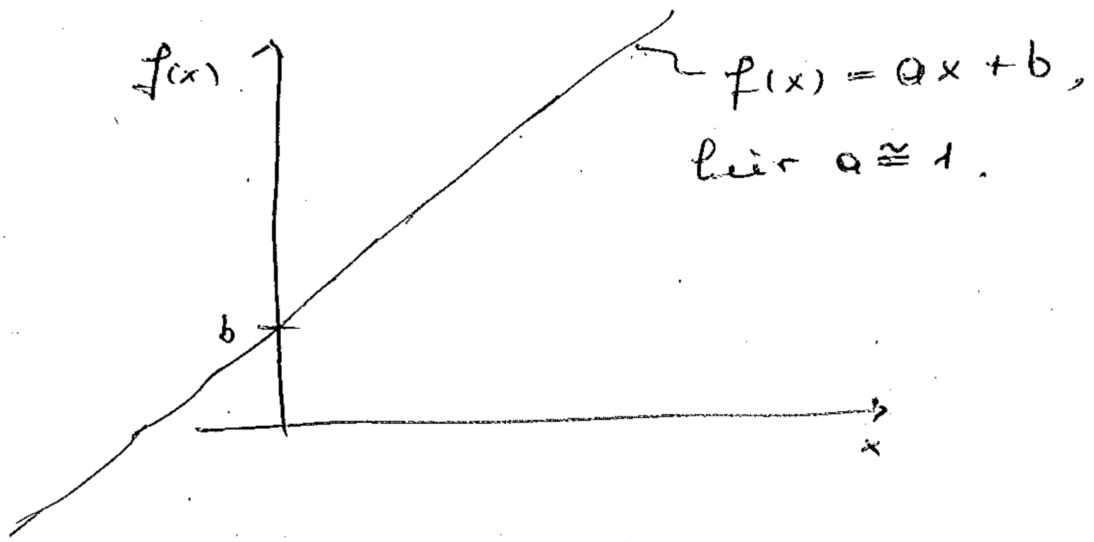
Diskussion:

(1) $b = f(0)$ heißt der y-Achsenabschnitt von f. Ist $b = 0$, liegt eine lineare Funktion (vgl. letztes Semester) vor.

(2) Der Graph von f ist eine Gerade durch $(0, b)$ mit der Steigung a, denn für beliebige $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a x_2 + b - a x_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

G_f:



(3) Ein Spezialfall ist die identische Abbildung

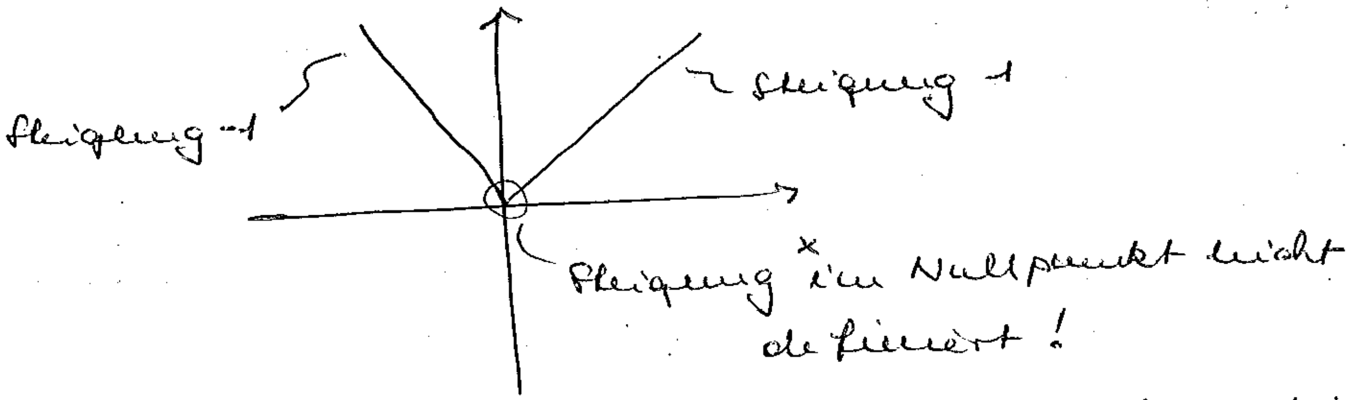
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x.$$

Sie ist linear (im eigentlichen Sinn) und ihr Graph ist eine Gerade durch $(0,0)$ mit der Steigung $a = 1$.

Nicht linear ist hingegen die Betragsfunktion

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = |x| \left(= \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases} \right)$$

Ihr Graph hat die Gestalt



Diese Fkt. würde man ggf. als "stückweise linear" bezeichnen.

(4) In den WWen treten affin-lineare Funktionen als einfachster Fall von Kostenfunktionen auf.

x = Menge eines produzierten Gutes

$K(x)$ = Kosten, um diese herzustellen

$K(x) = K_{fix} + K_{var}(x)$ (fixe und variable Kosten)

Im einfachsten Fall: K_{var} linear, etwa

$K_{var}(x) = kx$ ($k \in \mathbb{R}$ fest) $\Rightarrow K(x) = K_{fix} + kx$.

(5) Eine grundlegende Idee der Analysis ist es, hinreichend glatte Funktionen lokal (d.h. in einem Intervall um einen gegebenen Punkt) durch affin-lineare Funktionen zu approximieren (also anzunähern). Die Funktionen, für die eine solche Approximation möglich ist, nennen wir differenzierbar.

Eine weitere einfache Klasse von Funktionen bilden die quadratischen Funktionen:

Def.: Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Dann heißt die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := ax^2 + bx + c$$

eine <u>quadratische</u> Funktion.

Einfachster Fall: $f(x) = x^2$. Den Graphen dieser Funktion nennen wir die <u>Normalparabel</u>.

Durch Verschiebungen, Streckung und ggf. Spiegelung an der x-Achse können wir aus der Normalparabel den Graphen einer jeden quadratischen Funktion erzeugen.

Ganz allgemein gilt für zwei Funktionen f und g:

G_g entsteht aus G_f durch,	wenn $g(x) =$
• horizontale Verschiebung um c	$f(x-c)$
• vertikale Verschiebung um d	$f(x)+d$
• Streckung in y-Richtung um einen Faktor $s>0$	$s\,f(x)$
• Streckung in x-Richtung um einen Faktor $r>0$	$f(\frac{x}{r})$
• Spiegelung an der x-Achse	$-f(x)$

Versuchen wir also hiermit eine beliebige quadratische Funktion $g(x) = ax^2+bx+c$ aus der Normalparabel herzustellen. Wir starten mit

$f(x) = x^2 \rightsquigarrow$ Verschiebung um γ: $f_1(x) = (x-\gamma)^2$

$= x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 \rightsquigarrow$ Streckung um $|a|$, ggf.

und Spiegelung durch Multiplikation mit a

$\rightsquigarrow f_2(x) = ax^2 - 2\gamma a x + a\gamma^2$

$\rightsquigarrow$ Verschiebung in y-Richtung

$\rightsquigarrow g(x) = ax^2 - 2a\gamma x + a\gamma^2 + \delta$

falls $-2a\gamma = b$, also $\gamma = -\frac{b}{2a}$

und $a\gamma^2 + \delta = c$, also $\delta = c - a\gamma^2$

$= c - \frac{b^2}{4a}$

Der Punkt (0,0) wird als <u>Scheitelpunkt</u> der Normalparabel bezeichnet. Er wird verschoben nach

$$\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right),$$

was den Scheitelpunkt der allgemeinen Parabel ($= G_f$ für $f(x) = ax^2+bx+c$) darstellt. Diese ist nach oben geöffnet, falls $a>0$ ist, andernfalls nach unten.

Affin-lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle einer größeren Funktionenklasse, den "Polynomen" oder auch "ganzrationalen Funktionen".

<u>Def.</u>: Eine Funktion $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ heißt ein <u>Polynom</u> n-ten Grades. Die Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n$ werden als <u>Koeffizienten</u> des Polynoms bezeichnet.

<u>Bem.</u>:
- $n=1$: affin-linear, $n=2$: quadratisch (s.o.);
- $n=3$: kubisch;
- Bei nur einem Summanden: <u>Monom</u>.

Schließlich können wir den Quotienten aus zwei Polynomen bilden und gelangen so zu den rationalen Funktionen (ggf. "gebrochen rationale Funktionen"):

Def.: Es seien $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome und $N = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$. Dann heißt die Funktion

$$R : \mathbb{R} \setminus N \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

eine <u>rationale Funktion</u>.

Bem.: Sind P ~~und~~ bzw. R nur auf einem Intervall definiert, sprechen wir immer noch von einem Polynom bzw. einer rationalen Fkt.

Bei der Beschreibung von Wachstumsprozessen in den Natur- wie auch in den Gesellschaftswissenschaften spielt die Exponentialfunktion eine zentrale Rolle. Wir definieren sie üblicherweise als eine unendliche Reihe:

Def.: Die Funktion

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x) := e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

wird als <u>die</u> <u>Exponentialfunktion</u> oder kurz als die <u>e-Funktion</u> bezeichnet.

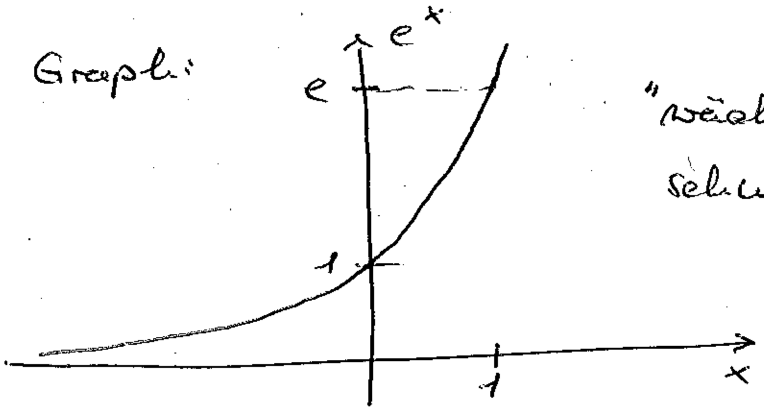
<u>Erläuterung /</u> Rekapitulation:

(i) Zur Erinnerung: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} a_k$, die unendliche Reihe wird als Grenzwert der Folge der Partialsummen aufgefaßt. Exakt: Es gibt einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\left|\sum_{k=0}^{N} a_k - a\right| \le \varepsilon \quad \forall N \ge N_0$.

(iii) $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2{,}71828\ldots$ (Eulersche Zahl)

(iv) Graph:



"wächst für positive x schneller als jedes Polynom" (später genauer)

(v) wichtige Eigenschaften der e-Funktion:

Funktionalgleichung: $e^{x+y} = e^x e^y$

$\curvearrowright$ $e^0 = 1$ $\qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \curvearrowright \ e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(vi) Darstellung als Grenzwert (Euler): $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

(vii) Die Gaussfunktion $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, die mit Hilfe der Exponentialfunktion definiert wird, spielt eine wichtige Rolle in der Stochastik.

(viii) Wachstumsprozesse, die einer endlichen Grenze zustreben, werden häufig durch logistische Funktionen modelliert, in denen ebenfalls die Exponentialfunktion auftritt:

Def. Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ nennt man die Fkt.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \frac{a + be^{cx}}{1 + e^{cx}}$$

eine logistische Funktion.

Bem.: (1) $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

(2) Beschreibt z. B. den zeitlichen Verlauf der Verbreitung von Gütern bzw. der Nachfrage nach solchen.

Eine logistische Funktion entsteht durch Verknüpfung einer Exponentialfunktion

$$g: x \longmapsto e^{cx}$$

mit der rationalen Funktion

$$h: [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad y \longmapsto h(y) = \frac{a + by}{1 + y}$$

Bilden wir die Komposition $h(g(x))$, so erhalten wir gerade die logistische Funktion.

Diese Konstruktion neuer Funktionen durch "Hintereinanderausführung" zweier bekannter wird häufig verwendet und erhält eine eigene Bezeichnung:

Def.: Es seien $g : \mathbb{R} \supset D_g \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \supset D_f \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(D_g) \subset D_f$. Dann heißt

$$f \circ g : D_g \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f \circ g(x) := f(g(x))$$

die *Verkettung* (oder: Komposition) *von f und g.*

Skizze:

$$\begin{tikzcd} D_g \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & D_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Wenn sich in dieser Situation $f \circ g(x) = x$ für alle $x \in D_g$ ergibt, nennen wir f die Umkehrfunktion von g.

Genauer:

Def.: Es seien $g : D_g \to \mathbb{R}$ und $f : D_f \to \mathbb{R}$ Funktionen, so daß

1. $D_f = g(D_g)$ und 2. $f \circ g(x) = x \quad \forall x \in D_g$.

Dann heißt f die *Umkehrfunktion* von g und wird mit g^{-1} bezeichnet.

Bem. Falls existent, ist g^{-1} eindeutig bestimmt.

Bsp./Bem.: (1) Für $x>0$ haben wir im letzten Semester den <u>natürlichen Logarithmus</u> definiert durch die Bedingung

$$y = \ln(x) \quad :\Longleftrightarrow \quad e^y = x$$

In diesem Fall haben wir also

$$x = e^y = e^{\ln(x)} = \exp\circ\ln(x),$$

d.h. der Logarithmus $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der e-Funktion $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$.

(2) In einigen Fällen ist die Umkehrfunktion durch elementare Umformungen zu bestimmen. Dies soll am Bsp. der logistischen Funktion

$$y : \mathbb{R} \to (a,b), \quad x \mapsto y(x) = \frac{a+be^{cx}}{1+e^{cx}}$$

erläutert werden. Man setzt $y = \dfrac{a+be^{cx}}{1+e^{cx}}$ und löst diese Gleichung nach x auf:

$$\Longrightarrow \quad y(1+e^{cx}) = a+be^{cx} \Rightarrow y-a = (b-y)e^{cx}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{cx} = \frac{y-a}{b-y} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{c}\cdot\ln\left(\frac{y-a}{b-y}\right),$$

was für $a<y<b$ definiert ist und die Umkehrfunktion

$$y^{-1} : (a,b) \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto y^{-1}(t) := \frac{1}{c}\cdot\ln\left(\frac{t-a}{b-t}\right)$$

ergibt. (Weitere Beispiele in den Übungen!)

(3) In vielen Fällen ist eine solche elementare Auflösung nach x nicht möglich. Man muß sich dann mit dem (oft mühsamen) Nachweis der Existenz der Umkehrfunktion begnügen. Dies führt – wie etwa beim Logarithmus – zur Definition einer "neuen" Funktion. Ein weiteres Bsp. dieser Art sind die Wurzeln,

$$x \longmapsto \sqrt[p]{x} = x^{\frac{1}{p}} \qquad (x \geq 0),$$

die wir als Umkehrfunktion von $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) := x^p$ eingeführt haben.

(4) Geht man von einer bijektiven Funktion f zu ihrer Umkehrfunktion über, werden die Rollen von Bild und Urbild, also von x und y vertauscht. Für den Graphen von f entspricht das der Vertauschung von x- und y-Achse, was man geometrisch als Spiegelung an der Diagonalen auffassen kann.

Der Graph $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht durch Spiegelung an $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ aus dem Graphen G_f von f. Als Formel:

$$G_{f^{-1}} = \{(y,x) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in G_f\}.$$