Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Vorlesungsprogramm für den 31. 05. 2007

(K. Steffen, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, SS 2007)

4.7 Integralrechnung in einer Veränderlichen

Die Grundidee der Integration ist das "*Aufsummieren der Werte einer kontinuierlichen Funktion*". Man könnte denken, dass das für die Wirtschaftswissenschaft nicht relevant ist, weil dort letztlich nur diskrete Größen auftreten, deren Werte ganze Vielfache gewisser Grundeinheiten sind, und dass deshalb das Aufsummieren der Werte immer mit der Bildung von (gewichteten) Summen aus endlich vielen Summanden erledigt werden kann. Das kann aber zu sehr unübersichtlichen Summen mit sehr vielen Summanden führen, und erst die idealisierte Modellierung ökonomischer Vorgänge durch kontinuierliche mathematische Funktionen führt zu einem leistungsfähigen Kalkül, mit dem man die Integrale – die Summen der kontinuierlichen Größen – in vielen Fällen einfach berechnen kann, und zwar mit Hilfe der Bildung einer "Antiableitung" (Stammfunktionm) der zu integrierenden Funktion. Wie bei der Extremstellenbestimmung, wo auch der Einsatz der Differentialrechnung in einem kontinuierlichen Modell viel leistungsfähiger ist als die direkte Suche nach dem größten unter vielleicht Millionen von Werten, so wird durch die Integralrechnung das Aufsummieren sehr vieler Werte, die man sich als kontinuierlich variierend vorstellen kann, sehr erleichtert. Auch das offensichtlich ökonomisch relevante Konzept des *Durchschnittswerts einer kontinuierlichen Funktion* kann erst im Rahmen der Integralrechnung definiert werden.

Zur Motivation betrachten wir einen *kontinuierlichen Zahlungsstrom* $R(t)$, der (in Geldeinheiten pro Zeiteinheit) über einen langen Zeitraum $[0, T]$ den Auf– oder Abbau eines Kapitals bzw. einer Schuld beschreibt, den erwarteten cashflow einer Produktion oder eines ganzen Wirtschaftszweigs, oder sonst irgendeinen Vorgang, bei dem sehr viele Zahlungen wechselnder Höhe über einen langen Zeitraum erfolgen. Wenn für die zeitliche Entwicklung der Zahlungen eine Gesetzmäßigkeit bekannt oder angenommen ist, so ist es mathematisch einfacher, den gesamten Vorgang durch eine elementare Funktion zu beschreiben, welche diese Gestzmäßigkeit modelliert, als Tausende von Einzelzahlungen zu erfassen. Typische Ansätze sind eine *linear progressive Zahlungsrate*

$$R(t) = R_0 + tS,$$

wo R_0 die anfängliche Zahlungsrate und $S = R'(t)$ deren konstante Steigerungsrate ist (wenn $S > 0$; im Fall $S < 0$ haben wir einen degressiven Zahlungsstrom), oder ein *geometrisch degressiver Zahlungsstrom*

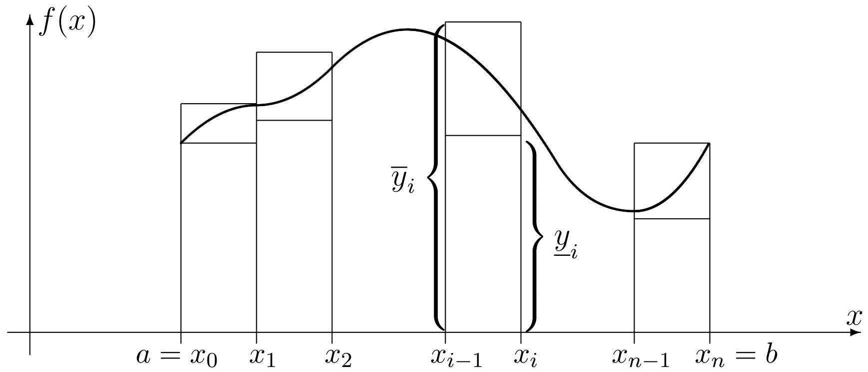
$$R(t) = R_0 \mathrm{e}^{-ct},$$

wo die Konstante $c > 0$ die *Halbwertszeit* $\tau = \dfrac{\ln 2}{c}$ bestimmt, nach der sich die Zahlungsrate jeweils halbiert hat (also $R(t+\tau) = \frac{1}{2}R(t)$ gilt).

Um nun bei bekanntem kontinuierlichen Zahlungsstrom $R(t)$ die in einem Zeitintervall $[0,T]$ insgesamt erbrachte Zahlungsleistung anzugeben, muss man im Prinzip die Werte $R(t)$ für $0 \leq t \leq T$ kontinuierlich aufsummieren. Dazu wird man das Zeitintervall $[0,T]$ in kleine Abschnitte einteilen durch eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ (man kann sich $t_i - t_{i-1}$ z.B. als Dauer eines Tages vorstellen) und für jedes kleine Zeitintervall $[t_{i-1}, t_i]$ eine konstante Zahlungsrate r_i annehmen. Als Gesamtzahlung im Zeitraum $[t_{i-1}, t_i]$ hat man dann $r_i(t_i - t_{i-1})$, und die Summe $\sum_{i=1}^n r_i(t_i - t_{i-1})$ wird man als Näherung für die gesuchte kontinuierliche Summe der Werte $R(t)$ mit $0 \leq t \leq T$ ansehen dürfen, wenn diese Werte für $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ jeweils nahe bei r_i liegen.

Genauer gesagt wird die Summe $\sum_{i=1}^n \overline{r}_i(t_i - t_{i-1})$ zu groß sein, wenn $\overline{r}_i$ jeweils größer ist als alle Werte von $R(t)$ im Intervall $[t_{i-1}, t_i]$, und $\sum_{i=1}^n \underline{r}_i(t_i - t_{i-1})$ wird zu klein sein, wenn $\underline{r}_i$ jeweils kleiner ist als diese Werte. Liegen die überschätzenden "Obersummen" $\sum_{i=1}^n \overline{r}_i(t_i - t_{i-1})$ und die unterschätzenden "Untersummen" $\sum_{i=1}^n \underline{r}_i(t_i - t_{i-1})$ nicht weit auseinander, so wird man beide zu Recht als gute Näherung für die zu bestimmende kontinuierliche Summe nehmen dürfen, und je feiner die Zerlegung ist und je genauer Unter– und Obersummen übereinstimmen, desto besser wird die Näherung sein. Die kontinuierliche Summe selbst wird dann *Integral genannt* (d.h. "Gesamtgröße", hier: Gesamtzahlung) und $\int_0^T R(t)\,dt$ bezeichnet. (Das Integralzeichen "$\int$" ist ein stilisiertes "S" für "Summe" und "*dt*" erinnert an die Differenzen $t_i - t_{i-1}$ die "infinitesimal klein" werden, wenn die Zerlegung beliebig verfeinert wird.)

Genau auf dieselbe Art von Näherungssummen stößt man bei einem Problem ganz anderer Art, das für ökonomische Anwendungen zwar nicht direkt relevant ist, wohl aber für die anschauliche Interpretation des Integrals. Hierbei geht es um die Definition des Flächeninhalts zwischen der horizontalen Achse und dem Graphen einer positiven Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{>0}$. Dazu teilt man das Grundintervall durch Zwischenpunkte $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ in Teilintervalle ein und betrachtet Schranken $0 < \underline{y}_i \leq f(x) \leq \overline{y}_i$ für die Funktionswerte zu Stellen $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Der gesuchte Flächeninhalt des Graphen über $[x_{i-1}, x_i]$ liegt dann zwischen den Inhalten der Rechtecke mit Höhen $\underline{y}_i$ bzw. $\overline{y}_i$ über den Grundseiten $[x_{i-1}, x_i]$, und der gesamte Flächeninhalt liegt zwischen der "Untersumme" $\sum_{i=1}^n \underline{y}_i(x_i - x_{i-1})$ und der "Obersumme" $\sum_{i=1}^n \overline{y}_i(x_i - x_{i-1})$. Bei genügend feiner Einteilung lassen sich $\underline{y}_i$, $\overline{y}_i$ so nahe beieinander wählen, dass Ober– und Untersumme beliebig wenig auseinander sind und daher den gesuchten Flächeninhalt beliebig gut approximieren.



Wir bemerken noch, dass jede Untersumme höchstens so groß ist wie eine beliebige Obersumme. Das ist klar wegen $\underline{y}_i(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{y}_i(x_i - x_{i-1})$, wenn beide zu derselben Zerlegung gebildet wurden. Dieses kann man aber immer annehmen, indem man einfach die Teilpunkte von zwei verschiedenen Zerlegungen zu einer einzigen Zerlegung vereinigt.

DEFINITION: Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ gegeben, so heißt $\sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i (x_i - x_{i-1})$ eine **Untersumme** und $\sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i (x_i - x_{i-1})$ eine **Obersumme** zu f auf dem Intervall $[a,b]$, wenn für die Funktionswerte von f auf jedem der Zerlegunsintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ gilt $\underline{y}_i \leq f(x) \leq \overline{y}_i$. Die Funktion f heißt **integrierbar** von a bis b, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Obersumme und eine Untersumme zu f auf $[a,b]$ gibt mit Differenz $< \varepsilon$. In diesem Fall heißt die eindeutige Zahl $c \in \mathbb{R}$, die zwischen allen Untersummen und allen Obersummen zu f auf $[a,b]$ liegt, das **(bestimmte) Integral** der Funktion f **von a bis b** (oder **zwischen den Grenzen a und b**) und wird notiert

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{(lies “Integral } a \text{ bis } b \text{ von } f(x)\ dx\text{”.)}$$

■

Die Zahl c ist dann das Supremum aller Untersummen und zugleich das Infimum aller Obersummen. Da keine Obersumme von einer Untersumme übertroffen wird, ist klar, dass das Supremum der Untersummen immer höchstens so groß ist wie das Infimum aller Obersummen. Wenn andererseits zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Untersumme $\underline{S}$ und eine Obersumme $\overline{S}$ mit $\overline{S} - \underline{S} < \varepsilon$ existieren, so folgt, dass das Infimum c aller Obersummen tatsächlich gleich dem Supremum der Untersummen ist und dass diese (und nur diese) Zahl c zwischen allen Untersummen und Obersummen liegt.

DISKUSSION: **1)** Die *geometrische Interpretation* des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ ist, wie schon gesagt, im Fall einer nichtnegativen Funktion $f \geq 0$ der *Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der horizontalen Achse*, wobei das Flächenstück seitlich von den Vertikalen durch die Endpunkte des Integrationsintervalls berandet wird. Allgemeiner sieht man leicht, dass für zwei Funktionen $g \geq f$ auf $[a,b]$ das Integral $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$ als *Flächeninhalt zwischen den Graphen* von f und g gedeutet werden kann, wobei das gemeinte Flächenstück wiederum seitlich begrenzt ist von den Vertikalen durch die Endpunkte des Integrationsintervalls.

2) Wenn f auch negative Werte haben kann, so wird im Integral der Flächeninhalt der Teile des Flächenstücks zwischen dem Graphen und der horizontalen Achse, die unterhalb der Achse liegen, *negativ gerechnet*; denn wenn in einer Unter– bzw. Obersumme die Werte $\underline{y}_i$ bzw. $\overline{y}_i$ negativ sind, so gibt der Summand $\underline{y}_i (x_i - x_{i-1})$ bzw. $\overline{y}_i (x_i - x_{i-1})$ natürlich einen negativen Beitrag zu der Summe. Der Integralwert $\int_a^b f(x)\,dx$ ist in einer solchen Situation also die Differenz der Flächeninhalte der Flächenstücke oberhalb der horizontalen Achse unter dem Graphen und der Inhalte der Flächenstücke unterhalb der Achse über dem Graphen. Will man den absoluten Gesamtinhalt dieser Flächenstücke angeben, ohne die Teile unter der Achse negativ zu rechnen, so muss man zu $|f|$ übergehen und $\int_a^b |f(x)|\,dx$ bilden, weil der Übergang von f zu $|f|$ die Teile des Graphen unter der Achse in ihr Spiegelbild über der Achse verwandelt.

Entsprechend ist das Integral einer Differenz zweier Funktionen $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$ nicht der Inhalt des Flächenstücks zwischen beiden Graphen, wenn g irgendwo im Intervall $[a,b]$ kleinere Werte als f hat, sondern die Stücke über $\mathrm{Graph}(f)$ und unter $\mathrm{Graph}(g)$ werden im Integral positiv gerechnet und die über $\mathrm{Graph}(g)$ und unter $\mathrm{Graph}(f)$ negativ (alles natürlich über dem Grundintervall $[a,b]$ betrachtet). Will man den absoluten Gesamtinhalt aller Flächenstücke zwischen beiden Graphen (und über dem Grundintervall), so muss man das Betragsintegral $\int_a^b |g(x) - f(x)|\,dx$ bilden.

3) *Ökonomische Anwendungen* des Integralkonzepts ergeben sich immer dann, wenn eine *Zuflussrate* oder *Abflussrate* $R(t)$ eines *Bestands* $B(t)$ bekannt ist (Kapitalstand, Lagerbestand, Bestand eines Rohstoffvorkommens, ...; $R(t) > 0$ bedeutet Zufluss, $R(t) < 0$ Abfluss) und die *Bestandsänderung in einem Zeitintervall* $[T_1, T_2]$ gesucht. In der eingangs gegebenen Motivation des Integralbegriffs haben wir überlegt, dass diese Bestandsänderung das bestimmte Integral der Rate $R(t)$ zwischen den Grenzen T_1 und T_2 ist,

$$B(T_2) - B(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} R(t)\,dt\,.$$

Auf diesen Zusammenhang kommen wir weiter unten beim Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung zurück. Weitere ökonomische Größen, die durch bestimmte Integrale mathematisch modelliert werden, behandeln wir in den Beispielen nach dieser Diskussion.

4) *Mittelwerte kontinuierlicher Größen*: Teilen wir $[a,b]$ durch $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ in n gleich lange Intervalle $[x_{i-1},x_i]$ der Länge $\frac{1}{n}(b-a)$ ein und wählen Funktionswerte $y_i = f(\xi_i)$ zu Stellen $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ aus, so liegt das arithmetische Mittel der Funktionswerte $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^n y_i(x_i-x_{i-1})$ zwischen dem $\frac{1}{b-a}$–fachen aller Unter– und Obersummen zu dieser Zerlegung. Daher ist es gerechtfertigt,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

als das **(arithmetische)Mittel der Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$** zu definieren, also als das Integral von a bis b geteilt durch die Länge des Integrationsintervalls.

5) Auch andere Mittelbildungen bei endlich vielen Zahlen können mit bestimmten Integralen auf kontinuierliche Variablen übertragen werden, z.B. das **quadratische Mittel**

$$\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^2 dx}\,,$$

allgemeinere **Potenzmittelbildungen** $\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^s\,dx\right]^{1/s}$ mit Exponenten $s \in \mathbb{R}$ und auch das **geometrische Mittel**

$$\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(x))\,dx\right)$$

(analog zu $(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n} = \exp[\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n)]$ beim geometrischen Mittel endlich vieler Zahlen). Beim geometrischen Mittel einer Funktion f wie auch bei den Potenzmittelwerten mit allgemeinen Exponenten s muss natürlich vorausgesetzt werden, dass f auf dem Integrationsintervall positiv ist.

Auch **gewichtete Mittel** mit einer **Gewichtsfunktion** $g(x) \geq 0$, $\int_a^b g(x)\,dx = 1$ lassen sich für Funktionen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ erklären, wenn die entsprechenden Ingtegrale existieren. Dabei wird oben der Faktor $\frac{1}{b-a}$ vor dem Integral weggelassen und "dx" ersetzt durch "$g(x)\,dx$", also ist z.B. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ das mit der Funktion $g(x)$ gewichtete arithmetische Mittel der Funktion f über das Intervall $[a,b]$. **Mediane** zu einer integrierbaren Funktion f auf $[a,b]$ heißen solche Zahlen $y \in \mathbb{R}$, für welche die Funktionen $\max\{0, \operatorname{sign}(f(x)-y)\}$ und $\max\{0, \operatorname{sign}(y-f(x))\}$ beide Integral $\leq \frac{1}{2}(b-a)$ von a bis b haben. Die erste Funktion hat den Wert 1, wenn $f(x) > y$ ist und 0 andernfalls, die zweite hat den Wert 1, wenn $f(x) < y$ ist und 0 sonst. Die Median–Bedingung für y besagt also, dass "höchstens die Hälfte" der Punkte $x \in [a,b]$ einen Funktionswert $f(x) > y$ haben und auch "höchstens die Hälfte" einen Wert $f(x) < y$.

6) Zur *Notation und Terminologie*; Beim Integralsymbol $\int_a^b f(x)\,dx$ sind die **Integrationsgrenzen** $a < b$ Konstanten (reele Zahlen), die **Integrationsvariable** x durchläuft das **Integrationsintervall** $[a,b]$ und kann mit beliebigen anderen Buchstaben bezeichnet werden (aber natürlich nicht mit a, b oder f), also

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(\xi)\,d\xi \;=\; \int_a^b f(t)\,dt \;=\; \ldots\,,$$

die Funktion $f(x)$ heißt der **Integrand** und kann auch als Rechenterm in der Variablen x in das Integral geschrieben werden. Das Integralsymbol $\int_a^b \ldots dx$ kommt von den sogenannten **Zwischensummen** $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ zu Stellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$; solche Zwischensummen liegen stets zwischen den Untersummen und Obersummen zu derselben Zerlegung. Früher schrieb man Δx_i für die Differenzen $x_i - x_{i-1}$, und das Ende "dx" des Integralsymbols deutet an, dass ein Grenzübergang vollzogen wird, bei dem man zu immer feineren Zerlegungen übergeht (also $\Delta x_i \to 0$). Das Integralzeichen "$\int$" ist ein stilisiertes "S" und erinnert an "Summe". Heutzutage sind auch andere Notationen wie

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx \qquad \text{oder ganz kurz} \qquad \int_a^b f$$

gebräuchlich. Letzteres geht aber nur, wenn für den Integranden ein Funktionsname f vergeben ist. Wird der Integrand als Rechenterm angegeben, so darf man die Angabe der Integrationsvariablen nicht weglassen, wenn es zu Missverständnissen führen könnte. $\int_1^4 x^y$ ist zum Beispiel missverständlich; denn es könnte

$$\int_1^4 x^y\,dx \qquad \text{oder} \qquad \int_1^4 x^y\,dy$$

gemeint sein, also das Integral der Potenzfunktion $x \mapsto x^y$ (bei festem Exponenten y) oder das Integral der Exponentialfunktion $y \mapsto x^y$ (bei fester Basis $x > 0$) jeweils über das Intervall $[1,4]$ (und beide Integrale haben im Allgemeinen verschiedene Werte). ■

BEISPIELE (***bestimmte Integrale in der Ökonomie***);

(1) Ein monopolistischer Produzent hat X_0 Einheiten seines Produkts abgesetzt und möchte den Absatz auf $X_1 > X_0$ langsam steigern. Er sieht sich allerdings einer fallenden Preisfunktion $p(x)$ gegenüber, d.h. mit wachsendem Angebot x fällt der Marktpreis. Welchen Erlös erzielt er insgesamt für $X_1 - X_0$ zusätzlich abgesetzte Einheiten?

Zerlegen wir $X_0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = X_1$ in kleine Intervalle (z.B. jeweils einer Produktionseinheit entsprechend), so liegt der Preis $p(x)$ für ein Angebot $x \in [x_{i-1}, x_i]$ zwischen dem Minimum $\underline{p}_i$ und dem Maximum $\overline{p}_i$ der Preisfunktion auf diesem Intervall, und der Erlös für die Zusatzproduktion bei Steigerung des Output von x_{i-1} auf x_i liegt zwischen $\underline{p}_i(x_i - x_{i-1})$ und $\overline{p}_i(x_i - x_{i-1})$. Der gesamte zusätzliche Erlös für die Steigerung des Output von X_0 auf X_1 liegt also zwischen der Untersumme $\sum_{i=1}^n \underline{p}_i(x_i - x_{i-1})$ und der Obersumme $\sum_{i=1}^n \overline{p}_i(x_i - x_{i-1})$. Folglich ist der *Erlöszuwachs* das bestimmte Integral

$$\int_{X_0}^{X_1} p(x)\,dx$$

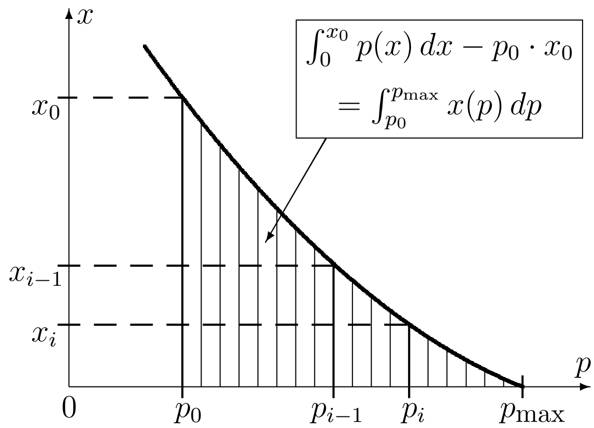
der Preisfunktion. Bei konstantem Marktpreis p ist der Erlöszuwachs natürlich einfach das Produkt $p\cdot(X_1 - X_0)$, und das ist in diesem Fall auch der Wert des Integrals, wie wir später bei der Berechnung von Integralen sehen werden. Bei nichtkonstantem Marktpreis mit bekannter (oder geschätzter) Preisfunktion ist der Erlöszuwachs aber nicht ohne weiteres elementar zu berechnen, sondern muss durch Integralrechnung ermittelt werden.

(2) Es liege eine streng fallende *Nachfragefunktion* $x(p)$ samt Umkehrfunktion $p(x)$ vor, bei Preis p_0 und Nachfrage $x_0 = x(p_0)$ habe sich ein Marktgleichgewicht eingestellt, $p = p_{\max} > 0$ sei der kleinste Preis, bei dem die Nachfrage $x(p) = 0$ wird. Die Frage ist hier, wieviel die Konsumenten dadurch sparen, dass jeder zum Preis p_0 kaufen kann statt zu dem höchsten für ihn noch noch akzeptablen Preis $p < p_{\max}$.

Dazu teilen wir $p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n = p_{\max}$ in kleine Preisintervalle ein und überlegen folgendermaßen: Zum Preis p_i hätten $x_i = x(p_i)$ Einheiten abgesetzt werden können, bei Herabsetzung des Preises auf p_{i-1} sparen die Konsumenten also mindestens $x_i(p_i - p_{i-1})$ und bei sukzessiver Herabsetzung von $p_{\max}$ auf p_0 insgesamt mindestens $\sum_{i=1}^n x_i(p_i - p_{i-1})$. Dies ist eine Untersumme zum Integral

$$\int_{p_0}^{p_{\max}} x(p)\,dp\,,$$

und da eine analoge Überlegung zeigt, dass die Ersparnis nicht größer ist als die Obersumme $\sum_{i=1}^n x_{i-1}(p_i - p_{i-1})$, gibt der Wert dieses Integrals den von den Konsumenten insgesamt gesparten Betrag an, den man **Konsumrente** nennt.



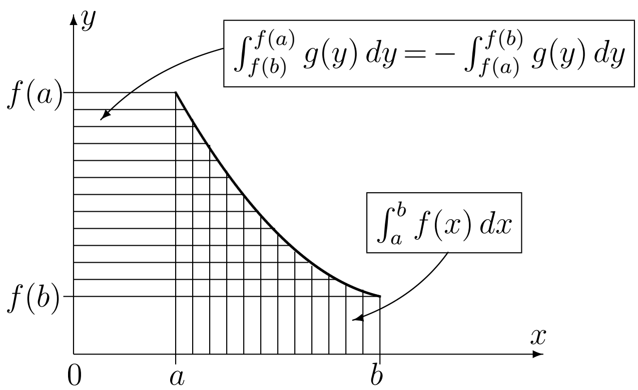
Man kann auch so argumentieren: Fällt der Preis von p_i auf p_{i-1}, so werden $x_{i-1} - x_i$ zusätzliche Einheiten gekauft, wofür die Konsumenten zwischen $p_{i-1}(x_{i-1} - x_i)$ und $p_i(x_{i-1} - x_i)$ zahlen würden. Insgesamt würden die Konsumenten also $\sum_{i=1}^n p_{i-1}(x_i - x_{i-1})$ $\approx \sum_{i=1}^n p_i(x_i - x_{i-1})$ ausgeben, und der gegenüber dem Kauf von x_0 Einheiten zum Preis p_0 gesparte Betrag ist

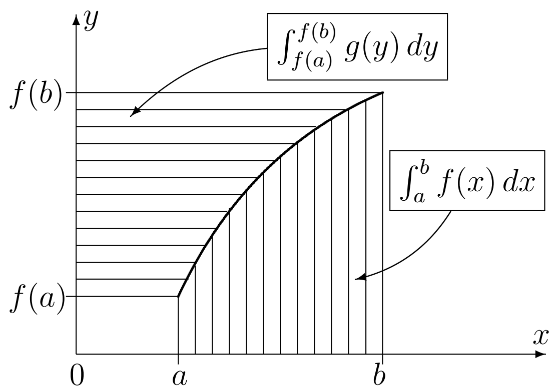
$$\int_0^{x_0} p(x)\,dx - p_0 \cdot x_0\,.$$

(3) Mit den Überlegungen in (2) haben wir im Prinzip einen *allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Integral einer streng monotonen stetigen Funktion* f *und ihrer Umkehrfunktion* $g = f^{-1}$ hergeleitet:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy = b \cdot f(b) - a \cdot f(a)\,,$$

der sich geometrisch deuten lässt, indem man die Flächen zwischen Graph(f) und horizontaler Achse bzw. zwischen Graph(f) und vertikaler Achse (entspricht dem Integral der Umkehrfunktion) addiert (wenn f wächst) bzw. subtrahiert (wenn f fällt), und das Resultat als Differenz der Rechteckinhalte $b \cdot f(b)$, $a \cdot f(a)$ deutet.

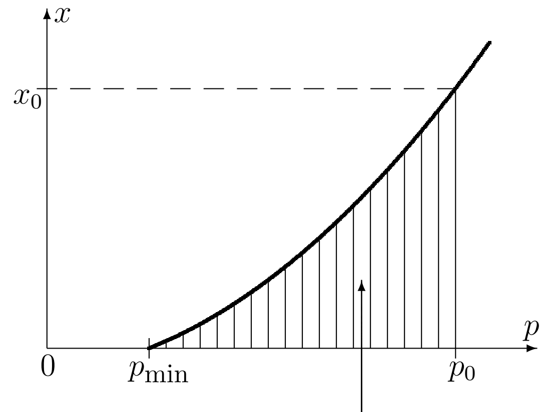




(4) Völlig analog zu (2) kann man die Situation einer *Angebotsfunktion* $x(p)$ behandeln, wenn die Produzenten eines bestimmten Produkts jeweils bei einem für sie akzeptablen Marktpreis ihren gesamten Output auf dem Markt bringen, im Marktgleichgewicht dann aber sogar ein höherer Preis p_0 erzielt wird. Der zusätzliche Erlös, der den Produzenten insgesamt dadurch entsteht, dass sie ihr Angebot nicht zu dem für sie akzeptablen Mindestpreis, sondern zum höheren Marktpreis verkaufen können, also die Differenz zwischen dem von den Produzenten insgesamt tatsächlich am Markt erreichten und dem für die Produzenten insgesamt akzeptablen Erlös, heißt **Produzentenrente** und ist gegeben durch

$$\int_{p_{\min}}^{p_0} x(p)\,dp \;=\; p_0 \cdot x_0 - \int_0^{x_0} p(x)\,dx\,,$$

wobei $p_{\min}$ der minimale Marktpreis ist, unter dem überhaupt kein Angebot erfolgt, und $x_0 = x(p_0)$ das Angebot zum Marktpreis p_0 im Marktgleichgewicht (und $p(x)$ die Umkehrfunktion zur Angebotsfunktion $x(p)$ wie üblich). Geometrisch ist die Produzentenrente zu deuten als der Flächeninhalt unter dem Graphen der Angebotsfunktion über $[p_{\min}, p_0]$ bzw. als Differenz des Rechteckinhalts $p_0 \cdot x_0$ (tatsächlich erzielter Erlös) und des Flächeninhalts unter dem Graphen der Umkehrfunktion über $[0, x_0]$ (für die Produzenten insgesamt akzeptabler Erlös).



$$\boxed{p_0 \cdot x_0 - \int_0^{x_0} p(x)\,dx = \int_{p_{\min}}^{p_0} x(p)\,dp}$$

(5) Wir betrachten die *Verzinsung eines kontinuierlichen Zahlungsstroms.* Ist $R(t)$ die Zahlungsrate (Geldeinheiten pro Jahr), so ist der im Zeitintervall $[T_1, T_2]$ insgesamt zugeflossene (wenn das Integral > 0 ist) bzw. abgeflossene (wenn es < 0 ist) Betrag gleich

$$\int_{T_1}^{T_2} R(t)\,dt\,.$$

Das haben wir früher schon festgestellt. Um die Werte der zu verschiedenen Zeitpunkten geleisteten Zahlungen vergleichbar zu machen, müssen sie auf einen gemeinsamen Zeitpunkt, etwa die Gegenwart $t = 0$, abgezinst werden. Bei kontinuierlichen Zahlungsströmen ist es sinnvoll, dabei *kontinuierliche Verzinsung* anzuwenden, d.h. der Aufzinsungsfaktor für den Zeitraum t Jahre ist $e^{rt/100}$, wobei $r\,\%$ der für stetige Verzinsung konforme Zinsfuß zum konstant angenommenen Jahreszinsfuß $p\,\%$ bei einfacher Verzinsung ist, d.h.

$$\mathrm{e}^{r/100} = 1 + \frac{p}{100}\,, \qquad \frac{r}{100} = \ln\Big(1 + \frac{p}{100}\Big)$$

(siehe 1.3; $\mathrm{e}^{r/100} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{r}{100\cdot n})^n$ ist der Limes der Aufzinsungsfaktoren zum Jahreszinsfuß $r\,\%$ bei n–facher unterjährlicher Verzinsung). In einem kleinen Zeitintervall $[t_{i-1}, t_i]$ beträgt die Ein– bzw. Auszahlung etwa $R(t_i)(t_i - t_{i-1})$, und der kontinuierlich abgezinste Gegenwartswert davon ist $\mathrm{e}^{-rt_i/100}R(t_i)(t_i - t_{i-1})$. Addieren wir diese Beträge für alle Intervalle einer Zerlegung $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T_2$, so bekommen wir eine Zwischensumme zum Integral

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{e}^{-\frac{rt}{100}} R(t)\,dt\,.$$

Dieses Integral ist also der **Gegenwartswert des kontinuierlichen Zahlungsstroms**, der im Zeitintervall $[T_1, T_2]$ zu– bzw. abfließt. Sein Wert zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt T ergibt sich daraus durch Multiplikation mit $\mathrm{e}^{rT/100}$.

(6) Ganz analog kann man den *Kapitalwert einer Investition* (Gegenwartswert) ermitteln, bei der ein *kontinuierlicher Einnahmestrom* $e(t)$, ein *Ausgabestrom* $a(t)$ und ein *Liquidationserlös* (Restwert) L nach der Zeit T erwartet werden. Unterstellt man darf Einnahmen und Ausgaben mit demselben Zinsfuß $r\,\%$ kontinuierlich abzinsen (was natürlich eine problematische Annahme, aber z.B. bei einer Finanzierung ohne Fremdkapital gerechtfertigt ist), so ergibt sich wie in (5) als **Kapitalwert der Investition**

$$C = \int_0^T \mathrm{e}^{-\frac{rt}{100}}[e(t) - a(t)]\,dt + \mathrm{e}^{-\frac{rT}{100}}L - A_0\,,$$

wobei A_0 die Anfangsausgabe ist. Dieser Kapitalwert C ist eine wichtige Größe für die Beurteilung der Zweckmäßigkeit der Investition und zum Vergleich mit alternativen Investitionen (je größer C desto besser).

(7) Man kann in (5) und (6) auch erwarteten *Änderungen des Marktzinsfußes* p Rechnung tragen indem man $\frac{r(t)}{100} = \ln(1+\frac{p(t)}{100})$ zeitlich variabel ansetzt. Den Aufzinsungsfaktor für einen Zeitraum $[T_1, T_2]$ bekommt man näherungsweise als Produkt

$$\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{r(t_i)}{100}(t_i - t_{i-1})\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r(t_i)}{100}(t_i - t_{i-1})\right)$$

der approximativen Aufzinsungsfaktoren für die Zeitintervalle einer Zerlegung $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T_2$. Durch Verfeinerung der Zerlegung und Übergang zum Integral erhält man also als

$$\text{Aufzinsungsfaktor für den Zeitraum } [T_1, T_2]: \qquad \exp\left(\int_{T_1}^{T_2} \frac{r(t)}{100}\,dt\right)\,,$$

und der **mittlere kontinuierliche Zinsfuß** $\widehat{r}\,\%$ ergibt sich für diesen Zeitraum durch Gleichsetzen mit $\mathrm{e}^{\widehat{r}(T_2 - T_1)/100}$ zu

$$\widehat{r} = \frac{1}{T_2 - T_1}\int_{T_1}^{T_2} r(t)\,dt\,.$$

Dies ist also das arithmetische Mittel der variierenden Zinsfüße $r(t)$ für kontinuierliche Verzinsung im Zeitintervall $[T_1, T_2]$. Der entsprechende jahreskonforme mittlere Aufzinsungsfaktor $\mathrm{e}^{\widehat{r}/100}$ ist dann das geometrische Mittel der Faktoren $\mathrm{e}^{r(t)/100}$ für $T_1 \le t \le T_2$. Als Gegenwartswert eines Zahlungsstromes $R(t)$ erhält man bei kontinuierlicher Verzinsung mit variablem Zinsfuß $r(t)\,\%$ im Zeitintervall $[T_1, T_2]$ dann analog zu (5) das Integral

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{e}^{-\frac{r(t)\cdot t}{100}} R(t)\,dt\,.$$

(8) Eine andere Verallgemeinerung der in (5) betrachteten Situation bezieht sich auf den Fall eines "*ewigen Zahlungsstroms*" $R(t)$, $0 \le t < \infty$. Dessen Gegenwartswert ist das sogenannte **uneigentliche Integral**

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{rt}{100}} R(t)\,dt$$

das so genannt wird, weil man "eigentlich" nur bei beschränkten Intervallen $[a, b]$ Zerlegungen in endlich viele Teilintervalle vornehmen und dazu die Unter– und Obersummen bilden kann, die man zur Erklärung des Integrals verwendet. Das Symbol $\int_a^\infty \ldots\,dt$ ist zu verstehen als Grenzwert der "eigentlichen" Integrale $\int_a^T \ldots\,dt$, wenn die obere Grenze $T \to \infty$ strebt und dabei der Limes der Integrale existiert. Entsprechend definiert man $\int_{-\infty}^b$, $\int_{-\infty}^\infty$ und auch $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{h\searrow 0}\int_{a+h}^b f(x)\,dx$, wenn z.B. f bei a eine Unendlichkeitsstelle hat (so dass wegen der Unbeschränktheit des Integranden keine endlichen Unter– oder Obersummen existieren und das Integral wieder nur "uneigentlich" ist). ■

Nach diesen Beispielen, welche die Bedeutung des Integralbegriffs für theoretische mathematische Modelle gewisser ökonomischer Vorgänge belegen, stellen sich nun zwei Fragen:

- *Welche Funktionen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sind integrierbar?*
- *Wie kann man für diese das Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *berechnen?*

Auf die erste Frage gibt die mathematische Integrationstheorie eine sehr befriedigende Antwort: Alle beschränkten Funktionen, die in der Praxis auftreten, sind integrierbar. Genauer gilt:

SATZ: *Ist die Funktion* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *auf dem kompakten Intervall* $[a, b]$ *stetig, so existiert das bestimmte Integral* $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$*. Das gilt auch wenn* f *nur Sprungstellen oder hebbare Unstetigkeitsstellen im Intervall* $[a, b]$ *hat.*

Weil er nicht schwierig ist, deuten wir den *Beweis* an: Ist f stetig und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es eine "Feinheit" $\delta > 0$ mit $|f(\widetilde{x}) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $\widetilde{x}, x \in [a, b]$ mit $|\widetilde{x} - x| < \delta$. (Andernfalls gäbe es Folgen (x_k), $(\widetilde{x}_k)$ in $[a, b]$ mit $|\widetilde{x}_k - x_k| \to 0$, aber $|f(\widetilde{x}_k) - f(x_k)| \geq \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß hätte die Folge (x_k) einen Häufungspunkt x in $[a, b]$, der dann auch einer für $(\widetilde{x}_k)$ ist, und an dieser Stelle x könnte f nicht stetig sein.) Wählt man jetzt Zerlegungen $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ so fein, dass $x_i - x_{i-1} < \delta$ ist für alle i und nimmt man als Werte $\underline{y}_i$, $\overline{y}_i$ das Minimum bzw. Maximum von f auf $[x_{i-1}, x_i]$, so folgt für die entsprechenden Untersummen $\underline{S} = \sum_{i=1}^n \underline{y}_i(x_i - x_{i-1})$ und Obersummen $\overline{S} = \sum_{i=1}^n \overline{y}_i(x_i - x_{i-1})$ dann $\overline{S} - \underline{S} = \sum_{i=1}^n (\overline{y}_i - \underline{y}_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon$, also ist f integrierbar. Gibt es nur endlich viele Unstetigkeitsstellen von f in $[a, b]$, die alle hebbar oder Sprungstellen sind, so kann man genau so argumentieren, wenn man diese Stellen als Teilungspunkte in die Zerlegungen mit einbezieht. Bei unendlich vielen Unstetigkeitsstellen – ein Fall, der in der Praxis nicht auftritt –, die alle hebbar oder Sprungstellen sind, muss man erst überlegen, dass f beschränkt sein muss, und dann, dass f nur endlich viele Unstetigkeitsstellen mit Sprunghöhe $\geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ haben kann. Danach kann man ähnlich argumentieren wie zuvor.

Im vorangehenden Beispiel (8) haben wir gesehen, dass es – auch für Anwendungen in der Ökonomie – erforderlich ist, den Integralbegriff noch so zu erweitern, dass auch unbeschränkte Integrationsintervalle und / oder Integranden, die am Rande des Integrationsintervalls eine Unendlichkeitsstelle haben, zugelassen sind. In solchen Fällen ist eine direkte Definition des Integrals durch Unter– und Obersummen zu Zerlegungen des Integrationsintervalls in *endlich viele* Teilintervalle nicht möglich, und man muss einen zusätzlichen Grenzübergang vornehmen, bei dem zunächst über innere kompakte Teilintervalle integriert wird und dann die Grenzen dieser Teilintervalle gegen die Grenzen des gewünschten Integrationsintervalls streben. Die Frage, für welche Integranden solche sog. **uneigentlichen Integrale** dann existieren und einen endlichen Wert haben, ist sehr viel schwieriger als der obige Satz. Es gibt dazu eine umfangreiche mathematische Theorie, die wir aber hier beiseite lassen.

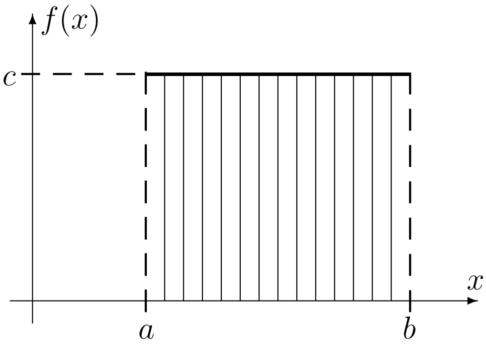
Nun zur zweiten Frage der Berechnung von Integralen. Bei (sehr) einfachen Integranden geht das direkt mit Ausrechnen von Unter– und Obersummen. Wir geben dazu nun einige Beispiele (später werden wir diese Integrale mit dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung weniger umständlich berechnen können.)

Beispiele (***Integralberechnung mit Ober– und Untersummen***):

(1) Für **konstante Funktionen** $f(x)=c$ für alle $x\in[a,b]$ ist $c(b-a)$ sowohl eine Unter– als auch eine Obersumme (zur der "Zerlegung" $a=x_0<x_1=b$), daher gilt:

$$\int_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)\,;$$

- *das Integral einer konstanten Funktion ist das Produkt der Konstanten mit der Länge des Integrationsintervalls.*

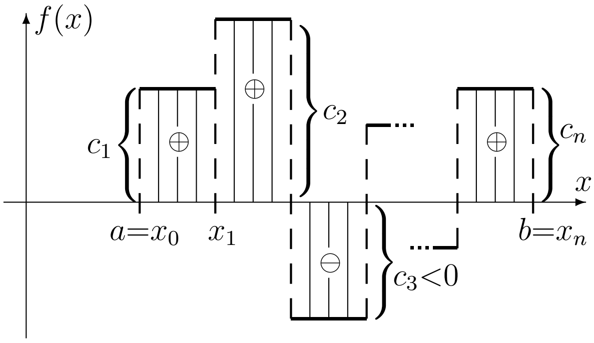


Geometrisch ist hier das Flächenstück zwischen der horizontalen Achse und dem Graphen ein Rechteck mit Kantenlängen $b-a$ und c (wenn $c>0$), sein Inhalt also $c\cdot(b-a)$. (Im Fall $c<0$ ist aber der Integralwert das Negative des Inhalts vom Rechteck zwischen dem unter der horizontalen Achse liegenden Graphen und der Achse!)

(2) Für **Treppenfunktionen** $f(x)=c_i$, wenn $x_{i-1}<x<x_i$ (für eine Zerlegung $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$), ist $\sum_{i=1}^n c_i(x_i-x_{i-1})$ sowohl Unter– als auch Obersumme (wenn an den Stellen x_i selbst der Wert $f(x_i)$ zwischen c_{i-1} und c_i festgelegt wird; man kann sich aber leicht überlegen, dass die Werte des Integranden an endlich vielen Stellen sowieso irrelevant für die Existenz und den Wert des Integrals sind). Daher gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i-x_{i-1})\,;$$

- *das Integral einer Treppenfunktion ist die Summe aus den Produkten der "Stufenhöhen" c_i mit den jeweiligen "Stufenbreiten" x_i-x_{i-1}.*

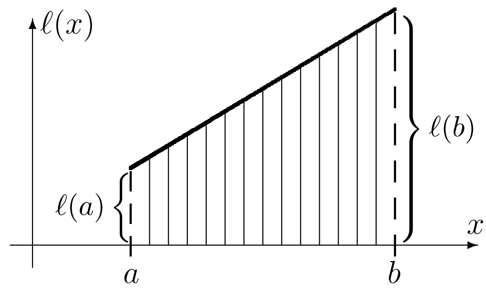


Geometrisch ist, wenn alle $c_i\geq 0$ sind, das Integral die Summe der Rechteckinhalte über den Teilintervallen der Zerlegung. Sind Stufenhöhen $c_i<0$, so wird der zugehörige Rechtecksinhalt im Integral aber negativ gerechnet (in der Abb. durch $\ominus$ gekennzeichnet).

(3) Für **lineare Funktionen** $\ell(x)=mx+c$ teilen wir $[a,b]$ in n Intervalle der Länge $\frac{1}{n}(b-a)$ ein durch die Teilungspunkte $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$. Dann sind $\sum_{i=1}^n \ell(x_i)\frac{b-a}{n}$ und $\sum_{i=1}^n \ell(x_{i-1})\frac{b-a}{n}$ eine Ober– und eine Untersumme. Die Berechnung der Summen mit der arithmetischen Summenformel gibt die Werte $\frac{1}{2}[\ell(a)+\ell(b)](b-a)\pm\frac{m}{2n}(b-a)^2$. Da n beliebig groß wählbar ist, folgt das Ergebnis:

$$\int_a^b \ell(x)\,dx = \frac{\ell(a)+\ell(b)}{2}\cdot(b-a)\,;$$

- *das Integral einer linearen Funktion ist das arithmetische Mittel ihrer Randwerte multipliziert mit der Länge des Integrationsintervalls.*



Das entspricht einer Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes. Der arithmetische Mittelwert der Funktion ℓ auf dem Intervall $[a,b]$ ist dann $\frac{1}{b-a}\int_a^b \ell(x)\,dx = \frac{\ell(a)+\ell(b)}{2}$, also gleich dem Mittel der Randwerte. (Das ist *nur* bei *linearen* Funktionen immer so!)

(4) Das Integral einer **Exponentialfunktion** r^x (mit $0 < r \neq 1$) lässt sich mit derselben Zerlegung wie in (3) bestimmen. Die Werte der Ober– und Untersummen ergeben sich nun mit der geometrischen Summenformel zu

$$\sum_{i=1}^{n} r^{a+i(b-a)/n}\frac{b-a}{n} = r^a\frac{b-a}{n}r^{(b-a)/n}\frac{r^{b-a}-1}{r^{(b-a)/n}-1}$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} r^{a+(i-1)(b-a)/n}\frac{b-a}{n} = r^a\frac{b-a}{n}\frac{r^{b-a}-1}{r^{(b-a)/n}-1}\,.$$

Bei $n\to\infty$ strebt der Differenzenquotient $\frac{r^{(b-a)/n}-1}{(b-a)/n}$ gegen $\frac{d}{dx}\big|_{x=0}r^x = \ln r$, daher konvergieren beide Summen gegen $r^a(r^{b-a}-1)/\ln r = (r^b - c^a)/\ln r$, und wir haben das Resultat

$$\boxed{\int_a^b r^x\,dx \;=\; \frac{r^b-r^a}{\ln r}} \qquad \text{speziell} \qquad \boxed{\int_a^b \mathrm{e}^x\,dx \;=\; \mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}\,.$$

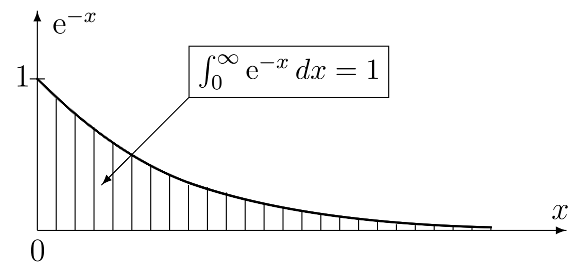
(5) Bei **Potenzfunktionen** x^s ist die äquidistante Zerlegung des Integrationsintervalls $[a,b] \subset \mathbb{R}_{>0}$ ungünstig. Besser klappt hier die "geometrische Zerlegung" $x_i = q^i a$ mit $q = \sqrt[n]{a/b}$. Als Ober– und Untersummen bekommt man dann $\sum_{i=1}^n (q^i a)^s q^{i-1}(q-1)a$ und $\sum_{i=1}^n (q^{i-1}a)^s q^{i-1}(q-1)a$. Ist $s \neq -1$, so lassen sich diese Summen mit der geometrischen Summenformel berechnen zu $a^{s+1}q^s(q-1)\frac{q^{(s+1)n}-1}{q^{s+1}-1}$ bzw. $a^{s+1}(q-1)\frac{q^{(s+1)n}-1}{q^{s+1}-1}$. Bei $n\to\infty$ strebt $q\to 1$ und der Differenzenquotient $\frac{q^{s+1}-1}{q-1}$ gegen $\frac{d}{dx}\big|_{x=1}x^{s+1} = s+1$. Unter Beachtung von $q^n = \frac{b}{a}$ findet man daher für beide Summen den Limes $a^{s+1}(s+1)[(\frac{b}{a})^{s+1}-1] = \frac{1}{s+1}(b^{s+1}-a^{s+1})$, und das bedeutet:

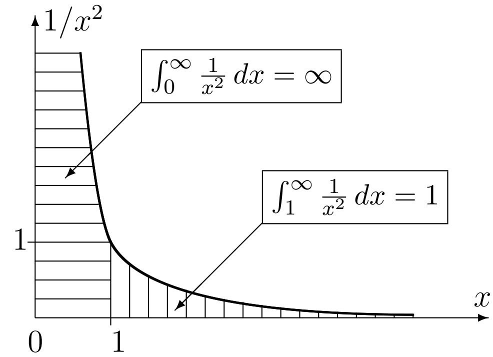
$$\boxed{\int_a^b x^s\,dx \;=\; \frac{b^{s+1}-a^{s+1}}{s+1}} \qquad \begin{array}{l}(\text{für } 0<a<b\\ \;\text{und } s\neq -1)\,.\end{array}$$

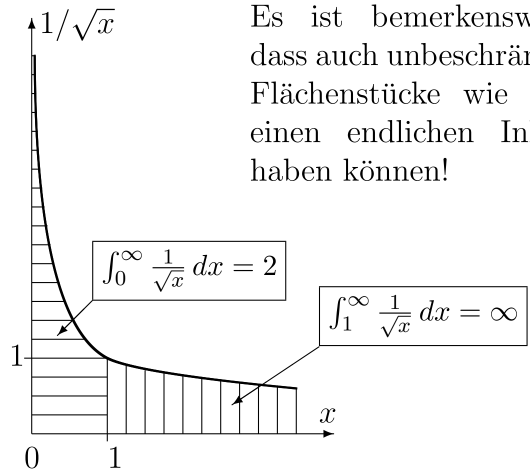
(6) Durch Grenzübergang $b\to\infty$ bzw. $a\searrow 0$ ergeben sich aus (4) und (5) die folgenden *uneigentlichen Integrale* (rechts $a>0$, $b>0$):

$$\int_a^\infty \mathrm{e}^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-b}-\mathrm{e}^{-a}}{\ln \mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^{-a}\,, \qquad \int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases}\infty & \text{für } s\le 1\,,\\ \dfrac{a^{1-s}}{s-1}<\infty & \text{für } s>1\,,\end{cases}$$

$$\int_0^b \frac{1}{x^s}\,dx = \begin{cases}\dfrac{b^{1-s}}{1-s}<\infty & \text{für } s<1\,,\\ \infty & \text{für } s\ge 1\,.\end{cases}$$







Es ist bemerkenswert, dass auch unbeschränkte Flächenstücke wie hier einen endlichen Inhalt haben können! ■

Man könnte mit der Integralrechnung wenig anfangen, wenn die Berechnung von Integralen immer so mühsam mit Ober– und Untersummen erfolgen müsste wie in den obigen Beispielen. Dann könnte man auch gleich die diskreten ökonomischen Vorgänge betrachten, also statt der Integrale entsprechende Summen mit vielen Summanden. Der Übergang zu den idealisierten kontinuierlichen Modellen bringt nur etwas, wenn dadurch letzten Endes die Summenberechnung durch eine *einfachere* Berechnung ersetzt werden kann. Das werden wir in vielen Fällen auch tun können. Zuvor überlegen wir noch einige plausible Rechenregeln, mit denen man die Integration von gewissen zusammengesetzten Funktionen auf die ihrer Bestandteile zurückführen kann:

DISKUSSION (**Rechenregeln für bestimmte Integrale**):

1) Für $a < b$ in $\mathbb{R}$ und integrierbare reelle Funktionen auf $[a, b]$ gilt:

Summenregel:
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx\,;$$

Faktorregel:
$$\int_a^b r \cdot f(x)\, dx = r \cdot \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{für } r \in \mathbb{R};$$

Verschiebungsregel:
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{a-c}^{b-c} f(y+c)\, dy \quad \text{für } c \in \mathbb{R};$$

Skalierungsregel:
$$\int_a^b f(x)\, dx = r \cdot \int_{a/r}^{b/r} f(ry)\, dy \quad \text{für } r \in \mathbb{R}_{\neq 0};$$

Zerlegungsregel:
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^z f(x)\, dx + \int_z^b f(x)\, dx \quad \text{für } a < z < b.$$

All diese Regeln lassen sich aus einfachen Überlegungen mit Unter– und Obersummen herleiten.

2) Bei der Verschiebungsregel und der Skalierungsregel ist zu beachten, dass die Funktion f auf beiden Seiten der Gleichung an denselben Stellen ausgewertet wird – sonst könnte eine solche Regel nicht für beliebige Funktionen gelten. Die Variabble $y+c$ muss also rechts dasselbe Intervall $[a, b]$ durchlaufen wie die Integrationsvariable x links, und damit ergibt sich die **Umrechnung der Integrationsgrenzen** zu $a-c \leq y \leq b+c$ rechts. Ebenso muss die Variable ry in der Skalierungsregel rechts dasselbe Intervall durchlaufen wie x links, so dass die umgerechneten Integrationsgrenzen rechts durch $a/r \leq y \leq b/r$ gegeben sind (wenn $r > 0$). Formal ersetzt man bei der Skalierungsregel x links durch ry und dx durch $d(ry) = r\, dy$, so dass rechts ein zusätzlicher Faktor r vor dem Integral entsteht. Geometrisch bedeutet die Verschiebungsregel, dass sich der Flächeninhalt zwischen einem Funktionsgraphen und der horizontalen Achse bei horizontaler Verschiebung der Funktion nicht ändert, und die Faktorregel bzw. die Skalierungsregel besagen, dass der Inhalt sich um den Faktor r vergrößert bzw. verkleinert, wenn der Graph in horizontaler oder in vertikaler Richtung um den Faktor r gestreckt bzw. gestaucht wird.

3) Die Zerlegungsregel bedeutet, dass sich *das Integral additiv verhält bei Zerlegung des Integrationsintervalls* $[a, b]$ durch einen Zwischenpunkt z zwischen a und b. Geometrisch entspricht das der Tatsache, dass die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der horizontalen Achse durch eine vertikale Gerade in zwei Teile zerlegt wird, deren Inhalte sich zum Inhalt der Gesamtfläche addieren. Die Zerlegungsregel gilt auch, wenn nur die Existenz der beiden Integrale $\int_a^z \ldots$ und $\int_z^b \ldots$ rechts vorausgesetzt wird; die Existenz des Integrals $\int_a^b \ldots$ links folgt dann.

4) Im Hinblick auf die Zerlegungsregel ist es sinnvoll, bei Grenzenvertauschung

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{für } \ a<b \qquad \text{und} \qquad \int_a^a f(x)\,dx := 0$$

zu definieren; denn die Regel $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^z f(x)\,dx + \int_z^b f(x)\,dx$ gilt dann auch, wenn z nicht zwischen a und b liegt, sofern die beiden Integrale rechts existieren. Und die Skalierungsregel $\int_a^b f(x)\,dx = r\cdot\int_{a/r}^{b/r} f(ry)\,dy$ gilt, wie schon in 1) angegeben, auch für negative Faktoren r, wenn man das Integral rechts als $-r\int_{b/r}^{a/r} f(x)\,dx$ auffasst. Man kann sich denken, dass die Notation der Integrationsgrenzen einen Durchlaufsinn für das Integrationsintervall angibt, nämlich vom unten notierten zum oben notierten Randpunkt (also bei $\int_a^b$ von links nach rechts, wenn $a<b$ ist, aber von rechts nach links, wenn $a>b$ ist). Solch ein Durchlaufsinn heißt auch “Orientierung”, und dementsprechend spricht man vom **orientierten Integral** $\int_a^b \ldots dx$, das nun für beliebige $a,\, b\in\mathbb{R}$ definiert ist, nicht nur für $a<b$, sofern der Integrand auf dem kompakten Intervall mit den Randpunkten a und b integrierbar ist. Die Regel $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ist dann für alle $a,\, b\in\mathbb{R}$ gültig (wenn $f(x)$ auf $[\min\{a,b\},\max\{a,b\}]$ integrierbar ist).

- *Bei Vertauschung der Integrationsgrenzen ändert der Wert des orientierten Integrals sein Vorzeichen (d.h. er wird mit dem Faktor* -1 *multipliziert).*

Es kommt bei orientierten Integralen nur darauf an, ob die Integrationsvariable das Integrationsintervall in mathematisch positiver Richtung durchläuft (von der kleineren zur größeren Integrationsgrenze, gewöhnliches bestimmtes Integral) oder umgekehrt (von der größeren zur kleineren Grenze, Negatives des bestimmten Integrals mit umgekehrten Grenzen). Beim Integral $\int_a^b f(a+b-x)\,dx$ mit $a<b$ läuft zwar das Argument $a+b-x$ der Funktion f von b nach a, die Integrationsvariable x selbst aber von a nach b; daher ist dieses Integral gleich $\int_a^b f(x)\,dx$ ohne Vorfaktor -1. Das zeigt die korrekte Anwendung von Verschiebungsregel und Skalierungsregel mit $r=-1$, nämlich $\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-y)\,dy = (-1)\int_b^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. (Für konstante $f\equiv 1$ haben alle Integrale den Wert $b-a$; schon deswegen ist hier kein Faktor -1 anzubringen.)

5) Die Zerlegungsregel ist der Grund dafür, dass in den Berechnungen bestimmter Integrale das Ergebnis $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$ oft in Form einer Differenz $F(b)-F(a)$ der Funktionswerte einer Funktion F an den Integrationsgrenzen erscheint, wie wir es in der vorigen Beispielserie feststellen können. Ist nämlich $x_0\in[a,b]$ und definieren wir $F(x)$ als “unbestimmtes Integral” $\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ (“unbestimmt” ist dabei die obere Grenze, die als Variable aufgefasst wird), so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx = -F(a)+F(b)$.

6) Die Bildung des bestimmten Integrals ist ein additiver (Grenz–)Prozess; das ist der Grund für die Gültigkeit von Summen– und Faktorregel. Es gibt aber leider *keine Integrationsrechenregel für das Integral eines Produkts* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, welche dieses Integral in Verbindung mit den Integralen $\int_a^b f(x)\,dx$ $\int_a^b g(x)\,dx$ der einzelnen Faktoren bringen würde. Die Anwendung einer “selbstgestrickten” Produktregel wäre ein krasser Fehler in der Integralrechnung. (Die spätere Regel der “Produktintegration” bezieht sich auf Integranden der Form $f'(x)\cdot g(x)$ und rechnet die Integrale um in solche mit Integrand $f(x)\cdot g'(x)$.) Ebenso falsch wäre die Anwendung einer “Verkettungsregel” $\int_a^b h(f(x))\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} h(y)\,dy$ mit der Begründung, dass ja in beiden Integralen das Argument $y=f(x)$ der Funktion $h(y)$ durch das Intervall von $f(a)$ nach $f(b)$ laufe; dabei wird übersehen, dass es auf die “Durchlaufgeschwindigkeit” ankommt, und dass schon $h\equiv 1$, $f(x)=rx$ $(r\neq 1)$ ein Gegenbeispiel ist. (Die spätere “Substitutionsregel” berücksichtigt die Durchlaufgeschwindigkeit $f'(x)$.) ■

BEISPIELE (Anwendungen der Rechenregeln):

(1) Für ganze Exponenten $k \in \mathbb{N}_0$ haben wir schon $\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$ für $0 \le a < b$ gesehen. Mit der Skalierungsregel (Faktor $r = -1$) folgt dasselbe für $a < b \le 0$. Im Fall $a \le 0 \le b$ liefert die Zerlegungsregel ebenfalls $\int_a^b x^k dx = \int_a^0 x^k dx + \int_0^b x^k dx = \frac{1}{k+1}(0 - a^{k+1}) + \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - 0)$. Berücksichtigen wir noch die Definition des orientierten Integrals im Fall $a \ge b$, so haben wir insgesamt das Resultat:

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \text{ und alle } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

(2) Mit Summenregel, Faktorregel und (1) erhalten wir für **bestimmte Integrale von Polynomfunktionen**:

$$\begin{aligned}&\int_a^b (c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0)\,dx \\ &\qquad = c_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} + c_{n-1}\frac{b^n - a^n}{n} + \ldots + c_1 \frac{b^2 - a^2}{2} + c_0 \frac{b-a}{1}\,.\end{aligned}$$

(3) Mit Skalierungsregel und Faktorregel ergibt sich

$$\int_a^b r\mathrm{e}^{st}\,dt = \frac{r}{s}\int_{sa}^{sb} \mathrm{e}^u\,du = \frac{r}{s}(\mathrm{e}^{sb} - \mathrm{e}^{sa})\,.$$

(4) Funktionen mit Symmetrien:

$$\begin{aligned}\int_{-b}^b f(x)\,dx &= \int_{-b}^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b f(-x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx \\ &= \int_0^b [f(-x) + f(x)]\,dx = \begin{cases} 0, & \text{wenn } f \text{ ungerade} \\ 2\displaystyle\int_0^b f(x)\,dx, & \text{wenn } f \text{ gerade.}\end{cases}\end{aligned}$$

Nützlich, weil es so manche Integralberechnung erspart, ist für ungerade Funktionen (also $f(-x) = -f(x)$) insbesondere

- *Integrale ungerader Funktion über zu 0 symmetrische Intervalle verschwinden.*

Geometrisch ist das klar, weil hier genau die Hälfte der Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der horizontalen Achse unterhalb der Achse liegt, also negativ zu rechnen ist. Für gerade Funktionen auf einem zu 0 symmetrischen Intervall liegt links der vertikalen Achse derselbe Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der horizontalen Achse wie rechts, deshalb ist hier das Integral über das ganze Intervall das Doppelte des Integrals über den nichtnegativen Teil des Intervalls. Ist f eine periodische Funktion mit Periode $p > 0$, also $f(x+p) = f(x)$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx \qquad \text{wenn} \quad b - a = p,$$

- *Das Integral über eine Periodelänge hängt nicht ab von der Lage des Intervalls.*

Zum Beweis verschiebt man erst $[a, b]$ um ein ganzes Vielfaches von p, bis $a \le 0 \le b$ gilt, und rechnet dann mit Hilfe von $b = a+p$ nach: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \int_a^0 f(x+p)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \int_{a+p}^p f(y)\,dy + \int_0^b f(x)\,dx = \int_b^p f(x)\,dx + \int_0^b f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx$. Das Integral von $f(x)$ über ein Intervall der Länge mp (m Perioden, $m \in \mathbb{N}$) ist dann natürlich das m–fache des Integrals über eine Periode.

(5) Es fließe ein *linear degressiver Zahlungsstrom* $R(t) = a(T-t)$ von einem Kapital K_0 im Zeitraum $[0,T]$ ab; was ist der Kapitalstand K_T (ohne Verzinsung)?

Das geht mit Integration einer linearen Funktion:

$$K_T = K_0 - \int_0^T R(t)\,dt = K_0 - \int_0^T a(T-t)\,dt = K_0 - \frac{aT+0}{2}\cdot T = K_0 - \frac{a}{2}T^2\,.$$

(6) Ein Produzent hat X_0 Produkteinheiten zum Preis p_0 abgesetzt und befürchtet bei Angebot weiterer Einheiten einen Preisverfall gemäß $p(x) = p_0 - a(x-X_0)$ für $X_0 \le x \le x_{\max} = X_0 + \frac{1}{a}p_0$ $(a \in \mathbb{R}_{>0})$. Bis zu welchem Output $X > X_0$ soll er produzieren, wenn seine Kosten $K(x) = \kappa x + K_{\text{fix}}$ linear sind mit $0 < \kappa < p_0$?

Der *Erlöszuwachs* ist hier wieder das Integral einer linearen Funktion:

$$\begin{aligned}\int_{X_0}^X p(x)\,dx &= \int_{X_0}^X [p_0 - a(x-X_0)]\,dx\\ &= \frac{p_0 + p_0 - a(X-X_0)}{2}\cdot(X-X_0) = p_0(X-X_0) - \frac{a}{2}(X-X_0)^2\,.\end{aligned}$$

Die zusätzlichen Kosten sind $K(X) - K(X_0) = \kappa(X-X_0)$, der Gewinn für zusätzlich abgesetzte $X-X_0$ Einheiten beträgt also $(p_0-\kappa)(X-X_0) - \frac{a}{2}(X-X_0)^2$. Dies wird für $X \ge X_0$ maximiert, wenn $X - X_0 = \frac{p_0-\kappa}{a}$ ist, also $X = X_0 + \frac{p_0-\kappa}{a}$. Der *maximale Zusatzgewinn* ist dann $\frac{1}{2a}(p_0-\kappa)^2$ und die Produktion von X Einheiten bringt den maximalen Gewinn, sofern $p_0X_0 + \frac{1}{2a}(p_0-\kappa)^2 > \kappa X_0 + K_{\text{fix}}$ ausfällt. (Im Fall $\kappa \ge p_0$ liegt das Maximum bei $X = X_0$ und es ist $p_0X_0 \le \kappa X_0$; dann ist keine Produktionsausweitung mit Gewinn möglich.)

(7) Es sei eine *Angebotsfunktion* $x(p) = a(p-p_{\min})^s$ (mit $a>0$, $s>0$) gegeben für einen Markt, bei dem alle Produzenten ihr gesamtes Angebot an den Markt bringen, wenn der für sie jeweils akzeptablen Mindestpreis $p \ge p_{\min}$ gegeben ist. Wie groß ist die *Produzentenrente*, wenn sich $p_0 \ge p_{\min}$ als Marktpreis eingestellt hat?

Wie früher erklärt ist dieser Mehrgewinn, denn die Produzenten erzielen, weil der Marktpreis sich höher eingestellt hat als der für sie akzeptable Mindestpreis, das Integral

$$\int_{p_{\min}}^{p_0} x(p)\,dp = \int_{p_{\min}}^{p_0} a(p-p_{\min})^s\,dp = a\int_0^{p_0-p_{\min}} q^s\,ds = \frac{a}{s+1}(p_0-p_{\min})^{s+1},$$

wobei wir die Verschiebungsregel und die Formel für bestimmte Integrale von Potenzfunktionen benutzt haben.

(8) Es sei eine für $0 < p \le p_{\max}$ definierte *Nachfragefunktion* $x(p) = \frac{a}{p} - \frac{a}{p_{\max}}$ gegeben (mit $a \in \mathbb{R}_{>0}$), und $p_0 \in]0, p_{\max}[$ sei der sich tatsächlich einstellende Marktpreis. Wie groß ist dann die *Konsumrente*?

Wie früher erklärt ist diese Ersparnis der Konsumenten, die dadurch entsteht, dass sie das Produkt nicht zu dem für sie jeweils akzeptablen Höchstpreis, sondern für den günstigeren Marktpreis einkaufen können, gegeben durch das Integral

$$\begin{aligned}\int_{p_0}^{p_{\max}} x(p)\,dp = \int_{p_0}^{p_{\max}} \left(\frac{a}{p} - \frac{a}{p_{\max}}\right)dp &= a\ln\frac{p_{\max}}{p_0} - \frac{a}{p_{\max}}(p_{\max}-p_0)\\ &= a\left(\ln\frac{p_{\max}}{p_0} + \frac{p_0}{p_{\max}} - 1\right),\end{aligned}$$

das wir mit Summen und Faktorregel und mit den bereits bestimmten Integralen von Konstanten und von der Potenzfunktion mit Exponent -1 berechnet haben.

Die alternative Formel mit der Umkehrfunktion $p(x) = a(x + \dfrac{a}{p_{\max}})^{-1}$ gibt

$$\int_0^{x_0} p(x)\,dx - p_0 x_0 = a \ln\left(\frac{x_0 + a/p_{\max}}{a/p_{\max}}\right) - p_0 x_0$$

mit $x_0 = x(p_0) = \dfrac{a}{p_0} - \dfrac{a}{p_{\max}}$, und das ist dasselbe Ergebnis für die Konsumrente wie zuvor. ■

Auch wenn man ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nicht berechnen kann, so ist es unter Umständen doch möglich, seine Größe in brauchbarer Weise abzuschätzen. (Mit numerischen Integrationsverfahren geht das sogar beliebig genau.) Dazu machen wir folgende

BEMERKUNG (**über Größenvergleich und Abschätzung von Integralen**):
Sind $f\,g$ integrierbare Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ (mit $a < b$), so gilt:

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx,$ *wenn* $f \le g$ *ist überall auf* $[a, b]$*; speziell*

$\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx \ge 0,$ *wenn* $g \ge 0$ *ist überall auf* $[a, b]$*;*

Gleichheit gilt für stetige f, g *dabei nur, wenn* $f = g$ *bzw.* $g = 0$ *ist auf* $[a, b]$.

(ii) $\displaystyle m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$ *wenn* $m \le f \le M$ *ist überall auf* $[a, b]$*;*

der Mittelwert $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ *von* f *über* $[a, b]$ *liegt also zwischen* m *und* M.

(Meist nimmt man m *als Minimum und* M *als Maximum von* f *auf* $[a, b]$*.)*

(iii) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ *mit Gleichheit bei stetigem* f *nur,*

wenn f *auf* $[a, b]$ *überall* ≥ 0 *oder überall* ≤ 0 *ist.*

Dabei ergibt sich (i) unmittelbar aus der Integraldefinition, weil jede Obersumme zu g auch eine zu f ist; (ii) folgt, indem man f mit den konstanten Funktionen m und M vergleicht; und (iii) ergibt sich durch Vergleich von f und $-f$ mit $|f|$. Ist g stetig und nichtnegativ auf $[a, b]$ mit $g(x_0) > 0$ für eine Stelle $x_0 \in [a, b]$, also auch auf einer ganzen Umgebung von x_0 noch $g(x) \ge \frac{1}{2}g(x_0) > 0$, so vergleicht man g mit einer Treppenfunktion h, die auf einem Intervall der Länge $\delta > 0$ um x_0 in $[a, b]$ den Wert $\frac{1}{2}g(x_0)$ und sonst den Wert 0 hat. Es folgt $g \ge h$ auf $[a, b]$ und somit $\int_a^b g(x)\,dx \ge \int_a^b h(x)\,dx = \frac{1}{2}g(x_0)\delta > 0$; hieraus erhält man dann sofort die Aussagen über das Eintreten der Gleichheit in (i) und (iii). (Eine unstetige Funktion, die an endlich vielen Stellen Werte $\ne 0$ hat und sonst überall den Wert 0 hat auch den Integralwert Null; deshalb ist die Stetigkeitsvoraussetzung bei den Aussagen über das Eintreten der Gleichheit nicht entbehrlich.) ■

Wir kommen nun zum hauptsächlichen Hilfsmittel für die Berechnung bestimmter Integrale, dem sog. Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, der einen Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation herstellt. Man kann diesen Satz "ökonomisch" so motivieren: Ist $R(t)$ eine Zufluss– oder Abflussrate, die zum Aufbau bzw. Abbau eines Bestandes $B(t)$ beiträgt, so ist $R(t)$ die Änderungsrate des Bestandes, also gemäß

Differentialrechnung $R(t) = B'(t)$. Andererseits ist Bestandsänderung $B(T_2) - B(T_1)$ im Zeitraum $[T_1, T_2]$ gemäß der ökonomischen Interpretation des bestimmten Integrals gleich $\int_{T_1}^{T_2} R(t)\,dt$. Es folgt, dass man das Integral $\int_{T_1}^{T_2} R(t)\,dt$ berechnen kann, indem man zum Integranden $R(t)$ eine Stammfunktion $B(t)$ bestimmt, also eine Funktion mit $R(t)$ als Ableitung, und dann einfach die Differenz der Werte dieser Stammfunktion an den Integrationsgrenzen $t = T_2$ und $t = T_1$ bildet. *Damit ist die Integration auf die Bestimmung von Stammfunktionen zurückgeführt, also auf die Umkehrung der Differentiation.* Um das zu präzisieren, formulieren wir (das Intervall I enthalte stets mehr als einen Punkt):

DEFINITION: **(i)** Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** zu der gegebenen reellen Funktion f auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, wenn f die Ableitung von F ist, also $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

(ii) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ auf jedem kompakten Teilintervall $[a, b]$ des Intervalls I integrierbar, so heißt jede Funktion der Form

$$J(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \text{const} \qquad \text{für } \ x \in I$$

mit unterer Grenze $x_0 \in I$ und einer sog. **Integrationskonstante** const $\in \mathbb{R}$ ein **unbestimmtes Integral** zur gegebenen Funktion f auf I. Für solche Funktionen J wird auch kurz $\int^x f(t)\,dt + \text{const}$ oder $\int f(x)\,dx + \text{const}$ geschrieben ohne Fixierung der oberen Integrationsgrenze (oder ganz kurz $\int f + \text{const}$, wobei auch die Hinzufügung der Integrationskonstanten oft unterbleibt) ■

DISKUSSION: **1)** Aus dem Konstanzsatz in 4.6 folgt, wie dort schon vermerkt wurde:

- *Stammfunktionen auf einem Intervall I sind eindeutig bis auf eine Konstante*

(wenn existent); denn ist $F' = f$ auf I und auch $\widetilde{F}' = f$ auf I, so gilt ja $(\widetilde{F} - F)' = f' - f' = 0$ auf I, also ist $\widetilde{F} - F$ konstant auf I. Umgekehrt ist mit $F(x)$ natürlich auch $F(x) + c$ eine Stammfunktion zu f auf I, wenn c eine beliebige reelle Konstante ist.

2) Beim unbestimmten Integral wird die obere Grenze nicht fest vorgegeben, sondern als Variable aufgefasst (daher "unbestimmt"); man integriert also für jedes $x \in I$ von der unteren Grenze x_0 bis x und erhält in dieser Weise eine neue *Funktion* $J(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

- *Das unbestimmte Integral ist das bestimmte Integral aufgefasst als Funktion der oberen Integrationsgrenze.*

Da die untere Grenze x_0 hierbei willkürlich in I gewählt wird und da sich $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ und $\int_{x_1}^{x} f(t)\,dt$ gemäß Zerlegungsregel nur um die (von x unabhängige) Konstante $c = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt$ unterscheiden, wenn man verschiedene untere Grenzen x_0, $x_1 \in I$ wählt, ist es sinnvoll, jede Funktion der Form $J(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \text{const}$ mit einer Konmstanten const $\in \mathbb{R}$ als "gleichberechtigtes" unbestimmtes Integral von f aufzufassen. Konsequenz:

- *Unbestimmte Integrale sind als Funktionen nur bis auf eine Konstante bestimmt.*

Deshalb ist es z.B. nicht ganz korrekt zu sagen, $\frac{1}{2}x^2$ sei *das* unbestimmte Integral der Funktion $f(x) = x$ auf $\mathbb{R}$. Zwar ist $\int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2$, also $\frac{1}{2}x^2$ *ein* unbestimmtes Integral, aber auch $\frac{1}{2}x^2 + 1$ oder $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$ sind mit gleichem Recht unbestimmte Integrale.

Es ist übrigens auch beim unbestimmten Integral $J(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \text{const}$ durchaus zugelassen, dass die obere Grenze kleiner ist als die untere, also $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = -\int_{x}^{x_0} f(t)\,dt$. ■

SATZ (**Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung**):
Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *sei stetig auf dem Intervall* $I \subset \mathbb{R}$ *und* $x_0 \in I$. *Dann gilt:*

(i) (**erster Hauptsatz**) *Die Ableitung des unbestimmten Integrals ist der Integrand,*

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right] \;=\; f(x) \qquad (x \in I);$$

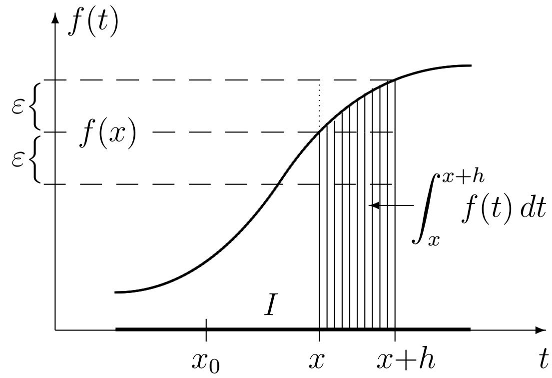
anders gesagt: Jedes unbestimmte Integral ist eine Stammfunktion des Integranden.

(ii) (**zweiter Hauptsatz**) *Jede Stammfunktion* F *des Integranden auf* I *ist auch ein unbestimmtes Integral auf* I, *d.h.*

$$F(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + \text{const} \qquad (x \in I)$$

und insbesondere

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a)} \qquad \text{für alle } a, b \in I.$$



Zum *Beweis* betrachtet man $J(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ und zu $x \in I$ einen Differenzenquotienten $\frac{1}{h}[J(x{+}h) - J(x)] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Da f stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon{>}0$ ein $\delta{>}0$, so dass $f(x) - \varepsilon \le f(t) \le f(x) + \varepsilon$ ist für alle $t \in I$ mit $|t{-}x| < \delta$. Daraus folgt $f(x) - \varepsilon \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \le f(x) + \varepsilon$ für $0 < |h| < \delta$ mit $x{+}h \in I$. Dies bedeutet aber gerade, dass $J'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x)$ ist. Damit ist (i) gezeigt, d.h. $J(x)$ ist Stammfunktion zu $f(x)$. Ist $F(x)$ eine weitere, so unterscheidet sie sich von $J(x)$ nur um eine Konstante, also gilt (ii) und speziell $F(b) - F(a) = J(b) - J(a) = \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

DISKUSSION: **1)** Der Inhalt des Hauptsatzes wird oft kurz so gefasst:

- *Die (unbestimmte) Integration ist die Umkehrung der Differentiation.*

Es wird auch gesagt, unbestimmte Integration sei "*Antidifferentiation*". Genauer besagt der erste Teil, dass man mit Bildung des unbestimmten Integrals zu f und anschließender Differentiation die (stetige) Funktion f zurückerhält, während der zweite Teil aussagt, dass man durch Ableitung einer (stetig differenzierbaren) Funktion F und nachfolgender unbestimmter Integration die Funktion F — bis auf eine Konstante — zurückbekommt. Da Integration (Approximation mittels Ober– und Untersummen) ein ganz anderes Konzept ist als Differentiation (Limes von Differenzenquotienten), ist der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung keineswegs offensichtlich, sondern eine tiefliegende mathematische Einsicht.

2) Für die **Anwendung auf die Berechnung bestimmter Integrale** ist der zweite Hauptsatz das entscheidende Hilfsmittel: Wenn man zum Integranden in einem vorgelegten Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ eine Stammfunktion $F(x)$ schon kennt oder leicht erraten kann, so hat man auch den Wert des Integrals, nämlich $F(b) - F(a)$. Um eine Stammfunktion zu finden, kann man eine Ableitungstabelle "rückwärts" lesen und evtl. den Integranden nach Umformung als aufgelistete Ableitung einer Grundfunktion entdecken. Dies ist ein Rateverfahren, und allgemein ist man bei der Bestimmung von Stammfunktionen auf (mehr oder weniger systematisches) Raten angewiesen; denn:

- *Nicht jede elementare Funktion ist "in geschlossener Form integrierbar", d.h. nicht jede elementare Funktion hat eine elementare Stammfunktion;*
- *folglich gibt es kein Rechenverfahren (Algorithmus), das zu jeder elementaren Funktion eine elementare Stammfunktion berechnet.*

Elementare Funktionen, die bekanntermaßen keine elementare Stammfunktion besitzen, sind z.B. schon so einfache Funktionen wie e^{x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\ln x}{1+x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\sqrt{(2-x^2)/(1-x^2)}, \ldots$. Das heißt nicht, dass diese Funktionen keine Stammfunktion besitzen; der erste Hauptsatz garantiert ja gerade die Existenz von Stammfunktionen auf Intervallen, wo die Integranden stetig sind. Es heißt nur, dass die (existierenden) Stammfunktionen nicht durch einen "elementaren" Rechenterm beschrieben werden können. Bei der Aufgabe, zu einem gegebenen elementaren Integranden eine elementare Stammfunktion zu finden und damit das vorgelegte bestimmte Integral zu berechnen, steht man immer vor dem Problem, zunächst nicht zu wissen, ob die Aufgabe überhaupt lösbar ist, d.h. ob es überhaupt eine elementare Stammfunktion gibt. Das zu entscheiden, und gegebenenfalls eine elementare Stammfunktion zu berechnen, geht nicht mit einem formalen Rechenschema. Deshalb *ist Integrieren eine Kunst* — im Unterschied zum Differenzieren elementarer Funktionen, was ein Handwerk ist, das man mit Hilfe der Ableitungsrechenregeln schematisch erledigen kann.

3) Weil bei der Integration mit dem Hauptsatz immer die Differenz $F(b) - F(a)$ der Stammfunktionswerte an den Grenzen auftritt, ist folgende abkürzende *Notation* gebräuchlich und praktisch:

$$F\Big|_a^b = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a),$$

was auch für Rechenterme verwendet wird, etwa

$$e^x\Big|_{x=a}^{x=b} = e^b - e^a, \qquad x^3\Big|_{x=-1}^{x=2} = 2^3 - (-1)^3 = 9\,.$$

Statt $F(x)|_{x=a}^{x=b}$ findet man auch $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$ und ähnliche Notationen.

4) Für *Integranden $f(x)$ mit isolierten Sprungstellen oder hebbaren Unstetigkeitsstellen* gilt der Hauptsatz, wenn man unter einer Stammfunktion $F(x)$ eine *stetige* Funktion versteht, für die $F'(x) = f(x)$ ist an allen Stellen x außer den isolierten Sprungstellen und hebbaren Unstetigkeitsstellen. Das sieht man leicht ein, indem man das Integrationsintervall in Teilintervalle ohne innere Unstetigkeitsstellen zerlegt. In diesem Sinne ist z.B. $F(x) = |x|$ eine Stammfunktion zu $f(x) = \text{sign}(x)$; denn $\frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}x = 1 = \text{sign}(x)$ gilt für $x > 0$ und $\frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}(-x) = -1 = \text{sign}(x)$ für $x < 0$. Tatsächlich ist auch

$$\int_a^b \text{sign}(x)\,dx = \int_0^b \text{sign}(x)\,dx + \int_a^0 \text{sign}(x)\,dx = |b| - |a|\,,$$

da $\int_0^b \text{sign}(x)\,dx = \int_0^b 1\,dx = b = |b|$ ist für $b > 0$ und $\int_0^b \text{sign}(x)\,dx = -\int_b^0 -1\,dx = -b = |b|$ für $b < 0$. Der zweite Hauptsatz ist aber im Allgemeinen nicht richtig für unstetige Funktionen $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$ für alle x bis auf endlich viele Ausnahmestellen. Das zeigt zum Beispiel $F(x) = \text{sign}(x)$ mit $\frac{d}{dx}\text{sign}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, aber $\int_{-1}^1 0\,dx = 0 \neq 2 = \text{sign}(x)|_{x=-1}^{x=1}$. ■

BEISPIELE (***eine kleine Integraltafel***): Hier geben wir unbestimmte Integrale zu einigen elementaren (insbesondere stetigen) Integranden an, die in der Differentialrechnung größtenteils schon als Ableitung vorgekommen sind. Rechts steht also jeweils eine Stammfunktion zum Integranden auf dem angegebenen Intervall I (bzw. auf $\mathbb{R}$, wenn diese Angabe unterbleibt). arctan, arcsin, Artanh, Arcoth, Arsinh bzw. Arcosh sind die Umkehrfunktionen zu $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$, sin, $\tanh = \dfrac{\sinh}{\cosh}$, $\coth = \dfrac{\cosh}{\sinh}$, sinh bzw. cosh auf den Intervallen $]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$, $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, $]-\infty,\infty[$, $]0,\infty[$, $]-\infty,\infty[$ bzw. $[0,\infty[$.

$$\int x\,dx = cx + \text{const} \qquad (c \in \mathbb{R} \text{ eine Konstante}),$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \text{const} \qquad (n \in \mathbb{N}_0),$$

$$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \text{const} \qquad (n \in \mathbb{N}_{\geq 2},\ I = \mathbb{R}_{>0} \text{ oder } I = \mathbb{R}_{<0}),$$

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + \text{const} \qquad (I = \mathbb{R}_{>0} \text{ oder } I = \mathbb{R}_{<0}),$$

$$\int x^s\,dx = \frac{1}{s+1}x^{s+1} + \text{const} \qquad (s \in \mathbb{R}_{\neq -1},\ I = \mathbb{R}_{>0}),$$

$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + \text{const},$$

$$\int \mathrm{e}^{sx}\,dx = \frac{1}{s}\mathrm{e}^{sx} + \text{const} \qquad (s \in \mathbb{R}_{\neq 0}),$$

$$\int r^x\,dx = \frac{1}{\ln r}r^x + \text{const} \qquad (0 < r \neq 1),$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + \text{const},$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + \text{const},$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + \text{const},$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + \text{const},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + \text{const},$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \mathrm{Artanh}(x) + \text{const} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + \text{const} \qquad (I =]-1,1[),$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \mathrm{Arcoth}(x) + \text{const} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + \text{const} \qquad (I = \mathbb{R}_{>1}),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + \text{const} \qquad (I =]-1,1[),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \mathrm{Arsinh}(x) + \text{const} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \text{const},$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \mathrm{Arcosh}(x) + \text{const} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + \text{const} \qquad (I = R_{>1}).$$

Alle früher mühsam mit Ober– und Untersummen berechneten bestimmten Integrale von elementaren Grundfunktionen lassen sich nun aus dieser Tabelle mit dem Hauptsatz $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ für $F' = f$ unmittelbar ablesen, nämlich:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\,dx &= cb - ca = c(b-a), && (c \in \mathbb{R} \text{ eine Konstante}),\\
\int_a^b x^s\,dx &= \frac{1}{s+1}(b^{s+1} - a^{s+1}) && \begin{array}{c}(s \in \mathbb{R}_{\neq -1} \text{ und } a, b > 0\\ \text{oder } s \in \mathbb{Z} \text{ und } a \cdot b > 0\\ \text{oder } s \in \mathbb{N}_0 \text{ und } a, b \in \mathbb{R}),\end{array}\\
\int_a^b \frac{1}{x} &= \ln b - \ln a && (\text{für } a, b \in \mathbb{R}_{>0}),\\
\int_a^b \mathrm{e}^x\,dx &= \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a, &&\\
\int_a^b \mathrm{e}^{sx}\,dx &= \tfrac{1}{s}(\mathrm{e}^{sb} - \mathrm{e}^{sa}) && (s \in \mathbb{R}_{\neq 0}),\\
\int_a^b r^x\,dx &= \frac{1}{\ln r}(r^b - r^a) && (0 < r \neq 1).
\end{aligned}$$

Aber nun sehen wir zum Beispiel durch Rückwärtslesen der Ableitungstabelle auch noch

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sin x\,dx &= -(\cos b - \cos a),\\
\int_a^b \cosh x\,dx &= \sinh b - \sinh a,\\
\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan(b) - \arctan(a),\\
\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \operatorname{Arsinh}(b) - \operatorname{Arsinh}(a) = \ln \frac{b + \sqrt{1+b^2}}{a + \sqrt{1+a^2}}.
\end{aligned}$$

Außerdem finden wir durch Grenzübergang $b \to \infty$ oder $a \searrow 0$ oder $a \to -\infty$ einen endlichen Wert für einige uneigentliche Integrale:

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx &= \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{a^{s-1}} && \text{für } s > 1,\ a > 0,\\
\int_0^b \frac{1}{x^s}\,dx &= \frac{1}{1-s} b^{1-s} && \text{für } 0 < s < 1,\ b > 0,\\
\int_a^\infty \mathrm{e}^{-sx}\,dx &= \tfrac{1}{s}\mathrm{e}^{-sa} && \text{für } s > 0,\ a \in \mathbb{R},\\
\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \arctan(b) - \lim_{a\to-\infty} \arctan(a) = \ = \tfrac{\pi}{2} - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = \pi\,. &&
\end{aligned}$$

■

Einen Schritt weiter kommen wir mit dem folgenden Satz, der nichts weiter ist als eine Formulierung der entsprechenden Rechenregeln aus der Differentialrechnung und den früher angegebenen Rechenregeln für bestimmte Integrale entspricht. (Wie immer nehmen wir an, dass das Intervall I positive Länge hat, also nicht leer ist oder aus nur einem Punkt besteht.)

SATZ: *Sind f, g stetige reelle Funktionen auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so gelten die*

Summenregel	$\displaystyle\int (f \pm g)\,dx \;=\; \int f\,dx \pm \int g\,dx + \text{const} \quad \text{auf } I,$
Faktorregel	$\displaystyle\int rf\,dx \;=\; r\int f\,dx + \text{const} \quad \text{auf } I \quad (r \in \mathbb{R}),$
Verschiebungsregel	$\displaystyle\int f(x{+}c)\,dx \;=\; \int^{x+c} f(t)\,dt + \text{const} \quad \text{für } x{+}c \in I \quad (c \in \mathbb{R}),$
Skalierungsregel	$\displaystyle\int f(sx)\,dx \;=\; \frac{1}{s}\int^{sx} f(t)\,dt + \text{const} \quad \text{für } sx \in I \quad (s \in \mathbb{R}_{\neq 0}).$

Das bestätigt man sofort durch Differenzieren der Funktionen auf der rechten Seite; die Ableitung ist jeweils der links erscheinende Integrand. Die Regeln gelten auch, wenn f, g evtl. nicht stetig, sondern nur auf jedem kompakten Teilintervall von I integrierbar sind; das ergibt sich aus den Rechenregeln für bestimmte Integrale. (Die untere Grenze bei $\int^{x+d}\ldots$ und $\int^{sx}\ldots$ ist beliebig in I zu wählen; die Wahl spielt keine Rolle, da unbestimmte Integrale nur bis auf eine Konstante bestimmt sind, wie der Zusatz "$+\,\text{const}$" in allen Gleichungen anzeigt.) Zur Anwendung dieser Rechenregeln nun einige

BEISPIELE: **(1)** Für **Polynomfunktionen** gilt

$$\begin{aligned}
&\int (c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0)\,dx \\
&\quad= c_n \int x^n\,dx + c_{n-1}\int x^{n-1}dx + \ldots + c_1\int x\,dx + c_0 \int 1\,dx \\
&\quad= c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + c_{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots + c_1\frac{x^2}{2} + c_0 x + \text{const}\,,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\int_a^b (c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0)\,dx \\
&\quad= \frac{c_n}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) + \frac{c_{n-1}}{n}(b^n - a^n) + \ldots + \frac{c_1}{2}(b^2 - a^2) + c_0(b - a)\,.
\end{aligned}$$

(2) Zwar haben nicht alle elementaren Funktionen eine elementare Stammfunktion, doch gilt immerhin:

- *Alle rationalen Funktionen haben eine elementare Stammfunktion,*

aber die Stammfunktion ist nicht unbedingt wieder rational, sondern kann auch logarithmische Terme enthalten. Die Berechnung einer Stammfunktion zu einer (nichtpolynomialen) rationalen Funktion ist allerdings komplizierter als die unbestimmte Integration von Polynomen in (1). Wir beschränken uns hier daher auf Nenner vom Grad 1 oder 2. Bei rationalen Funktionen mit *linearem Nenner* $cx + d$ $(c \neq 0)$ kann man mit Polynomdivision zunächst die Form

$$r(x) = p(x) + \frac{A}{cx+d} \qquad (x \neq -\tfrac{c}{d})$$

erreichen mit einem Polynom $p(x)$ und einer Konstanten $A \in \mathbb{R}$. Das unbestimmte Integral hierzu ergibt sich mit Summenregel, Verschiebungsregel und Faktorregel sowie $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + \text{const}$ (auf Intervallen in $\mathbb{R}_{\neq 0}$) zu

$$\int r(x)\,dx = \int p(x)\,dx + \frac{A}{c}\ln|cx+d| + \text{const}$$

auf Intervallen, welche die Polstelle $-\frac{d}{c}$ nicht enthalten (ist Polstelle von $r(x)$, wenn $A \neq 0$). *Damit sind die Integrale aller rationalen Funktionen mit linearem Nenner bestimmt.*

(3) Bei *rationalen Funktionen* $r(x)$ *mit quadratischem Nenner* erreicht man mit Polynomdivision zunächst die Form

$$r(x) = p(x) + \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

mit einem Polynom $p(x)$ und Konstanten $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$. Hier klammert man die Ableitung $2ax + b$ des Nenners im Zähler aus und erhält

$$r(x) = p(x) + \frac{A}{2a}\,\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} + \frac{B - Ab/2a}{ax^2 + bx + c}\,.$$

Der zweite Summand hat, weil $f'(x)/f(x)$ die Ableitung von $\ln|f(x)|$ ist, die Stammfunktion $\ln|ax^2 + bx + c|$ (auf Intervallen, wo $ax^2 + bx + c \neq 0$ ist) und den dritten Summanden kann man mit quadratischer Ergänzung auf eine der Formen

$$\frac{C}{(x - x_0)^2}\,, \qquad \frac{C}{1 - r^2(x - x_0)^2}\,, \qquad \frac{C}{1 + r^2(x - x_0)^2} \qquad (C \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}_{\neq 0})$$

bringen, je nachdem ob der Nenner eine doppelte, zwei einfache oder überhaupt keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat. Mit der Skalierungsregel und der Verschiebungsregel sowie den unbestimmten Integralen $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x} + \text{const}$ (auf Intervallen in $\mathbb{R}_{\neq 0}$), $\int \frac{1}{1 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \text{const}$ (auf Intervallen in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$) und $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + \text{const}$ bekommt man dazu die entsprechenden Stammfunktionen

$$\frac{-C}{x - x_0} + \text{const}, \qquad \frac{C}{2r}\ln\left|\frac{1 + r(x - x_0)}{1 - r(x - x_0)}\right| + \text{const}, \qquad \frac{C}{r}\arctan(r(x - x_0)) + \text{const}$$

(auf Intervallen in $\mathbb{R}_{\neq x_0}$ im ersten Fall bzw. in $\mathbb{R} \setminus \{x_0 + \frac{1}{r}, x_0 - \frac{1}{r}\}$ im zweiten Fall; die dritte Funktion ist Stammfunktion auf ganz $\mathbb{R}$). *Damit sind alle rationalen Funktionen mit quadratischem Nenner elementar integriert.*

Hier noch zwei konkrete Beispiele:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}\,dx &= \int \left(1 - \frac{x}{x^2 + x + 1}\right) dx = \int \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1/2}{x^2 + x + 1}\right) dx \\
&= \int \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2/3}{1 + \frac{4}{3}(x + \frac{1}{2})^2}\right) dx \\
&= x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + \text{const}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{x^2 + x - 2}\,dx &= \int \left(x - 1 + \frac{3x - 2}{x^2 + x - 2}\right) dx \\
&= \int \left(x - 1 + \frac{3}{2}\,\frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} - \frac{7/2}{x^2 + x - 2}\right) dx \\
&= \int \left(x - 1 + \frac{3}{2}\,\frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} + \frac{14/9}{1 - \frac{4}{9}(x + \frac{1}{2})^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\ln|x^2 + x - 2| + \frac{7}{6}\ln\left|\frac{x + 2}{x - 1}\right| + \text{const}\,,
\end{aligned}$$

letzteres natürlich nur auf Intervallen in R, welche die Nennernullstellen 1 und -2 nicht enthalten. ■

Für die Integration eines Produkts $f \cdot g$ von zwei Funktionen gibt es, wie schon gesagt, keine Regel, welche das unbestimmte Integral durch Stammfunktionen zu f und g ausdrückt. Tatsächlich kann es vorkommen, dass f und g elementare Stammfunktionen haben, aber das Produkt $f \cdot g$ nicht. Ein Beispiel ist $f(x) = \frac{1}{x}$ (mit Stammfunktion $\ln x$) und $g(x) = \mathrm{e}^x$ (mit Stammfunktion e^x) auf $\mathbb{R}_{>0}$, wofür das Produkt $\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ eine bekannte elementare Funktion ist, die keine elementare Stammfunktion besitzt. Aus der Produktregel für die Differentiation ergibt sich aber eine Integrationsregel, mit der das Integral eines Produkts von zwei Funktionen in das Integral eines Produkts von zwei anderen Funktionen umgeformt werden kann, welches dann unter glücklichen Umständen erfolgreich weiter bearbeitet werden kann.

SATZ (**Produktintegration, partielle Integration**): *Sind f, g reelle Funktionen mit stetigen Ableitungen f', g' auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, so gilt:*

$$\int f'(x) \cdot g(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx + \text{const}\,.$$

Diese Gleichung heißt auch "**Wälzformel**": Man darf im Integral den Ableitungsstrich von einem auf den anderen Faktor "herüberwälzen", wenn man das Vorzeichen des Integrals ändert und den sog. **Randterm**, das Produkt der beiden (nicht abgeleiteten) Funktionen, addiert. Der Namer "Randterm" kommt daher, dass bei bestimmter Integration dieser Term nur an den Randpunkten des Integrationsintervalls auszuwerten ist:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx &= f(x) \cdot g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx \\ &= f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx\,. \end{aligned}$$

Der *Beweis* der Produktintegrationsformel ergibt sich einfach aus der Produktregel für die Ableitung: $f \cdot g$ ist Stammfunktion zu $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, also gilt $\int f' \cdot g\, dx + \int f \cdot g'\, dx = f(x) \cdot g(x) + \text{const}$. Wenn f oder g einzelne Knickstellen haben, d.h. Nichtdifferenzierbarkeitsstellen, die noch Stetigkeitsstellen der Funktion selbst und Sprungstellen der (sonst stetigen) Ableitung sind, so gilt die Produktintegrationsformel auch. Das sieht man durch Zerlegung des Integrationsintervalls in die Intervalle zwischen den Knickstellen.

BEISPELE (***zur Produktintegration***):

(1) Beim Integral $\int x\mathrm{e}^x\, dx$ liegt es nahe, den ersten Faktor e^x als Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ aufzufassen und $g(x) = x$ als den zweiten Faktor im Integranden, weil dann durch Produktintegration das bekannte Integral $-\int \mathrm{e}^x\, dx = -\mathrm{e}^x + \text{const}$ entsteht:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'(x)}\, dx &= \underbrace{x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f(x)}\, dx + \text{const} \\ &= x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \text{const} = (x-1)\mathrm{e}^x + \text{const}\,. \end{aligned}$$

Mit der Produktzerlegung

$$\int \underbrace{x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g(x)}\, dx = \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g(x)} - \int \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{f(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^x}_{g'(x)}\, dx + \text{const}$$

hätte man dagegen nichts erreicht — das rechts entstehende Integral ist komplizierter als das linke. (Aber wir können diese Formel nun benutzen, um $\int x^2\mathrm{e}^x\, dx$ zu integrieren.)

(2) Mit der Produktintegrationsformel

$$\int \underbrace{(a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0)}_{\text{Polynom } p(x)} \cdot \underbrace{\mathrm{e}^{cx}}_{f'(x)}\, dx \;=\; p(x) \cdot \underbrace{\frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx}}_{f(x)} - \int \underbrace{(a_n n x^{n-1} + \ldots + a_1)}_{p'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx}}_{f(x)}\, dx + \text{const}$$

kann man Integrale, deren Integrand Produkt $p(x)\mathrm{e}^{cx}$ einer Polynomfunktion mit einer Exponentialfunktion ist, sukzessive auf Integrale derselben Form, aber mit Polynomen kleineren Grades, zurückführen und schließlich auf $\int \mathrm{e}^{cx}\, dx = \frac{1}{c}\mathrm{e}^{cx} + \text{const}$ $(c \neq 0)$. Man sieht an der Formel auch, dass $p(x)\cdot\mathrm{e}^{cx}$ eine Stammfunktion der Form $q(x)\cdot\mathrm{e}^{cx}$ besitzt, wo $q(x)$ eine Polynomfunktion vom gleichen Grad wie $p(x)$ ist. Dieses Polynom $q(x)$ kann man bestimmen, indem man $q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$ mit unbekannten Koeffizienten b_k ansetzt und dann die Koeffizienten durch Ableiten von $q(x)\mathrm{e}^{cx}$ und Gleichsetzen der Ableitung mit $p(x) \cdot \mathrm{e}^{cx}$ ermittelt. Ein Beispiel für diese Vorgehensweise ($c \neq 0$):

$$\begin{aligned}
&\int x^2 \mathrm{e}^{cx}\, dx \;=\; (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)\mathrm{e}^{cx} + \text{const} \\
\iff\;& x^2 \mathrm{e}^{cx} = \frac{d}{dx}\left[(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)\mathrm{e}^{cx}\right] \;=\; \left[b_2 2x + b_1 + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)c\right] \mathrm{e}^{cx} \\
&\qquad \iff\; b_2 c = 1, \quad 2b_2 + b_1 c = 0, \quad b_1 + b_0 c = 0 \\
&\qquad \iff\; b_2 = \frac{1}{c}\,, \quad b_1 = -\frac{2}{c^2}\,, \quad b_0 = \frac{2}{c^3}\,.
\end{aligned}$$

In dieser Weise kann man allgemein $\int (a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0)\mathrm{e}^{cx}\, dx$ berechnen.

(3) Beim Integral $\int \ln x\, dx$ scheint Produktintegration nicht möglich, weil der Integrand kein Produkt ist. Doch gibt es hier einen Trick, der manchmal zum Ziel führt:

- *Man kann sich im Integranden den Faktor* $1 = \dfrac{dx}{dx}$ *hinzudenken.*

Hier geht das wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int \ln x\, dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)}\, dx \;&=\; \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}\, dx + \text{const} \\
&=\; x \ln x - \int 1\, dx + \text{const} = x \ln x - x + \text{const}\,.
\end{aligned}$$

Allgemeiner geht so auch

$$\begin{aligned}
\int x^s \ln x\, dx \;&=\; \frac{x^{s+1}}{s+1} \ln x - \int \frac{x^{s+1}}{s+1} \cdot \frac{1}{x}\, dx + \text{const} \\
&=\; x^{s+1}\left(\frac{\ln x}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right) + \text{const}
\end{aligned} \qquad (s \neq -1).$$

(4) Für $s = -1$ verläuft die letzte Rechnung etwas anders:

$$\int \frac{1}{x} \ln x\, dx = (\ln x)^2 - \int (\ln x)\frac{1}{x}\, dx + \text{const}\,.$$

Hier entsteht rechts dasselbe Integral, das wir links berechnen wollten, also sind wir nicht weitergekommen? Glücklicherweise hat das Integral rechts den Koeffizienten $-1 \neq 1$, und damit sind wir auch fertig; denn wenn wir es auf die linke Seite bringen, so folgt

$$2\int \frac{1}{x} \ln x\, dx = (\ln x)^2 + \text{const} \qquad \text{also} \qquad \int \frac{1}{x} \ln x\, dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \text{const}\,,$$

was man durch Differenzieren der rechten Seite bestätigt. (Die Konstante in der letzten Gleichung ist natürlich die Hälfte der Konstante in der vorletzten Gleichung.)

In derselben Weise kannn man folgendes Integral behandeln (beachte $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$):

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 t\, dt &= \int \underbrace{\sin t}_{f'(t)} \cdot \underbrace{\sin t}_{g(t)}\, dt = \underbrace{-\cos t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\sin t}_{g(t)} - \int \underbrace{-\cos t}_{f(t)} \cdot \underbrace{\cos t}_{g'(t)}\, dt + \text{const} \\
&= -\cos t \cdot \sin t + \int \cos^2 t\, dt = -\cos t \cdot \sin t + t - \int \sin^2 t\, dt + \text{const} \\
&\Longrightarrow \int \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \cos t \cdot \sin t + \text{const}\,.
\end{aligned}$$

(Wieder steht “const” für eine Integrationskonstante, deren Wert sich von Zeile zu Zeile ändern kann.) Mit dieser Methode lässen sich allgemein $\sin^n t$, $\cos^m t$ und $\cos^m t \cdot \sin^n t$ für Exponenten $m, n \in \mathbb{N}_0$ elementar integrieren.

(5) Wegen der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = 1$ für die Kreislinie vom Radius 1 um den Ursprung der Zeichenebene beschreibt der Graph der Funktion $y = \sqrt{1 - x^2}$ über dem Intervall $[-1, 1]$ eine Halbkreislinie, und das Integral der Funktion über dieses Intervall ist der Flächeninhalt der Halbkreisscheibe zwischen der horizontalen Achse und dieser Halbkreislinie. Es lässt sich mit Produktintegration berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx &= \int_{-1}^{1} 1 \cdot \sqrt{1 - x^2}\, dx \\
&= x\sqrt{1 - x^2}\Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}\, dx \\
&= 0 + \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \\
&= -\int \sqrt{1 - x^2}\, dx + \arcsin(x)\Big|_{x=-1}^{x=1} \\
\Longrightarrow \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx &= \frac{1}{2} \arcsin(x)\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi\,.
\end{aligned}$$

Dies ist das bekannte Ergebnis, dass die Kreisscheibe vom Radius 1 als Flächeninhalt die Kreiszahl π hat (das Doppelte des berechneten Inhalts der Halbkreisscheibe).

(6) Die **Integration rationaler Funktionen** $r(x)$ kann zurückgeführt werden auf die Integralberechnung für sog. **Partialbrüche**

$$\frac{C}{(x - x_0)^k} \qquad \text{oder} \qquad \frac{Ax + B}{(y_0^2 + (x - x_0)^2)^l} \qquad (k, l \in \mathbb{N},\ y_0 \neq 0),$$

wo x_0 eine reelle Polstelle von $r(x)$ der Ordnung m und $1 \leq k \leq m$ ist oder $z_0 = x_0 + \mathring{\imath} y_0$ mit $y_0 \neq 0$ eine komplexe Polstelle der Ordnung n und $1 \leq l \leq n$. ($\mathring{\imath}$ ist die imaginäre Einheit, also $\mathring{\imath}^2 = -1$.) Der *Satz von der Partialbruchzerlegung* aus der Algebra garantiert, dass jede rationale Funktion eindeutig zerlegt werden kann in die Summe solcher Partialbrüche und einer Polynomfunktion. Praktisch erhält man diese Zerlegung, indem man zuerst mit Polynomdivision $r(x) = P(x) + \dfrac{p(x)}{q(x)}$ mit $\text{Grad}(p) < \text{Grad}(q)$ umformt, die reellen und nichtreellen Nullstellen von q samt ihrer Vielfachheit bestimmt und dazu dann die entsprechenden Partialbrüche wie oben angegeben mit zunächst noch unbekannten Koeffizienten A, B, $C, \ldots$ aufschreibt. Wenn man mit dem Hauptnenner all dieser Partialbrüche durchmultipliziert und die Koeffizienten bei den Potenzen von x vergleicht, so erhält man eindeutig lösbare lineare Bestimmungsgleichungen für diese Koeffizienten.

Da Polynomfunktionen einfach integriert werden können, bleibt dann als Aufgabe nur noch die Integration der Partialbrüche übrig. Beim ersten Typ ist das einfach:

$$\int \frac{C}{x-x_0}\,dx = C\ln|x-x_0| + \text{const}\,, \qquad \int \frac{C}{(x-x_0)^k}\,dx = \frac{-C}{(k-1)(x-x_0)^{k-1}} + \text{const}$$

gilt für $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ jeweils auf Intervallen in $\mathbb{R}_{\neq x_0}$. Beim zweiten Partialbruchtyp mit Exponent $l = 1$ ergänzt man wie schon früher vorgeführt den Zähler so, dass die Ableitung des Nenners entsteht:

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{y_0^2+(x-x_0)^2}\,dx &= \int \left[\frac{A}{2}\cdot\frac{2(x-x_0)}{y_0^2+(x-x_0)^2} + \frac{1}{y_0^2}\cdot\frac{Ax_0+B}{1+(x-x_0)^2/y_0^2}\right]dx \\
&= \frac{A}{2}\ln(y_0^2+(x-x_0)^2) + \frac{Ax_0+B}{y_0}\arctan\frac{x-x_0}{y_0} + \text{const}\,.
\end{aligned}$$

Bei Exponenten $l > 1$ formt man zunächst algebraisch um:

$$\int \frac{Ax+B}{(y_0^2+(x-x_0)^2)^l}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2(x-x_0)}{(y_0^2+(x-x_0)^2)^l}\,dx + (Ax_0+B)\int \frac{1}{(y_0^2+(x-x_0)^2)^l}\,dx\,.$$

Der Integrand im ersten Integral rechts ist die Ableitung von $\frac{-1}{l-1}(y_0^2+(x-x_0)^2)^{1-l}$, das Integral ist also bis auf eine Konstante gleich dieser Funktion. Das zweite Integral rechts führt man mit Produktintegration zurück auf dasselbe Integral mit um 1 verkleinertem Exponenten (der Einfachheit halber nehmen wir $x_0 = 0$ an, das lässt sich durch Verschieben ja erreichen; die Integrationskonstanten unterdrücken wir):

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(y_0^2+x^2)^{l-1}}\,dx &= \int 1\cdot\frac{1}{(y_0^2+x^2)^{l-1}} \\
&= x\,\frac{1}{(y_0^2+x^2)^{l-1}} - \int x\,\frac{(1-l)2x}{(y_0^2+x^2)^l}\,dx + \text{const} \\
&= \frac{x}{(y_0^2+x^2)^{l-1}} + 2(l-1)\int \frac{x^2}{(y_0^2+x^2)^l}\,dx + \text{const} \\
&= \frac{x}{(y_0^2+x^2)^{l-1}} + 2(l-1)\int \frac{1}{(y_0^2+x^2)^{l-1}}\,dx - 2(l-1)y_0^2\int \frac{1}{(y_0^2+x^2)^l}\,dx\,,
\end{aligned}$$

also

$$\int \frac{1}{(y_0^2+(x-x_0)^2)^l}\,dx = \frac{1}{(2l-2)y_0^2}\,\frac{x-x_0}{(y_0^2+(x-x_0)^2)^{l-1}} + \frac{2l-3}{(2l-2)y_0^2}\int \frac{1}{(y_0^2+(x-x_0)^2)^{l-1}}\,dx\,.$$

Durch Fortsetzung dieses "Exponenten–Verkleinerungsverfahrens" gelangt man schließlich zum Integranden $1/(y_0^2+(x-x_0)^2)$ mit dem bereits berechneten unbestimmten Integral $\dfrac{1}{y_0}\arctan\frac{x-x_0}{y_0} + \text{const}$.

Damit ist ein Verfahren beschrieben, mit dem man *zu jeder rationalen Funktion* $r(x)$ *das unbestimmte Integral als elementare Funktion berechnen kann.* Man sieht, dass das Ergebnis eine Linearkombination von einer rationalen Funktion mit Polstellen höchstens in den Polen von r mit Ordnung ≥ 2 und von Funktionen der Form $\ln|x-x_0|$ zu reellen Polstellen x_0 sowie $\arctan\frac{x-x_0}{y_0}$ zu nichtreellen Polstellen $x_0 + \mathring{\imath}y_0$ von r ist. Da die Funktionen der beiden letzteren Typen nicht rational sind, ist auch das unbestimmte Integral einer rationalen Funktion nur in Ausnahmefällen wieder rational. ■

Die nächste und letzte Integrationsrechenregel ist die wirkungsvollste, wegen der großen Wahlmöglichkeiten bei ihrer Anwendung aber auch die schwierigste. Sie entspricht der Kettenregel der Differentiation $(H \circ f)' = (H' \circ f) \cdot f' = (h \circ f) \cdot f'$, wenn H eine Stammfunktion zu h ist. Der Hauptsatz zusammen mit $H(f(x)) = \int_{y_0}^{f(x)} h(y)\,dy + \text{const}$ liefert daher sofort den

SATZ (**Substitutionsregel, Variablentransformation**): *Hat $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Ableitung auf dem Intervall I und ist die reelle Funktion h stetig auf dem Intervall $f(I)$, so gilt:*

$$\int h(f(x)) \cdot f'(x)\,dx \;=\; \int^{f(x)} h(y)\,dy + \text{const} \quad \textit{für } x \in I\,,$$

also

$$\int_a^b h(f(x)) \cdot f'(x)\,dx \;=\; \int_{f(a)}^{f(b)} h(y)\,dy \quad \textit{für alle } a, b, \in I\,.$$

Mit dem Term $\int^{f(x)} h(y)\,dy$ ist hier die Verkettung eines unbestimmten Integrals $H(y) = \int h(y)\,dy$, also einer Stammfunkton von h, mit der Funktion $f(x)$ gemeint. (Die nicht angegebene untere Integrationsgrenze ist irrelevant, da das unbestimmte Integral ohnehin nur bis auf eine Konstante eindeutig ist.)

DISKUSSION: **1)** Man kann die Substitutionsregel so verstehen: Wenn die Integrationsvariable x mit konstanter Geschwindigkeit 1 von a nach b läuft, so läuft $y = f(x)$ von $f(a)$ nach $f(b)$, aber nicht mit Geschwindigkeit 1. Daher werden in $\int_a^b h(f(x))\,dx$ die Funktionswerte von h im Intervall zwischen $f([a,b])$ mit anderer Gewichtung aufsummiert als im Integral $\int_{f(a)}^{f(b)} h(y)\,dy$. Der zusätzliche Faktor $f'(x)$, also die Geschwindigkeit der Variablen $y = f'(x)$, kompensiert diesen Effekt gerade; denn für kleine Zuwächse Δx bei x ist $\Delta y = f(x{+}\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ (symbolisch $dy = f'(x)dx$). Außerdem berücksichtigt der Faktor $f'(x)$ auch noch den Durchlaufsinn; denn er ist (beinahe überall) negativ in Bereichen, in denen $y = f(x)$ streng fällt, so dass im Integral $\int_a^b h(f(x))f'(x)\,dx$ die Werte von h entsprechend der Geschwindigkeit und der Orientierung der Variablen $y = f(x)$ aufsummiert werden.

2) Man kann die Substitutionsregel in zwei Richtungen verwenden. Wenn beim vorgelegten Integral der Integrand schon die Form $h(f(x)) \cdot f'(x)$ erkennen lässt, so hat man es auf die Integration der Funktion $h(y)$ zurückgeführt. Die **Umrechnung des Integranden** in $\int h(f(x))f'(y)\,dx$ erfolgt durch

- *Substitution einer unabhängigen Variablen y für die abhängige Variable $f(x)$*
- *und Substitution von dy für $f'(x)dx = \dfrac{dy}{dx}dx$ am Integralende.*

Andererseits kann man bei einem vorgelegten Integral $\int h(y)\,dy$ versuchen, durch eine geschickte Substitution $y = f(x)$ und $dy = f'(x)dx$ auf ein Integral $\int h(f(x))f'(x)\,dx$ zu kommen, das elementar berechenbar ist. Die **Umrechnung des Integranden** in $\int h(y)\,dy$ erfolgt dann durch

- *Substitution einer abhängigen Variablen $f(x)$ für die Integrationsvariable y*
- *und Substitution von $\dfrac{dy}{dx}dx = f'(x)dx$ für das Integrations–Endsymbol dy.*

Man darf dabei auch die **Umrechnung der Integrationsgrenzen** nicht vergessen. Diese ergibt sich aus der Überlegung, dass die Funktion h auf beiden Seiten an denselben Stellen ausgewertet werden muss. Wenn also auf einer Seite der Integrand $h(f(x)) \cdot f'(x)$ über das Intervall $a \le x \le b$ integriert wird (bzw. unbestimmt bis zur oberen Grenze x), so muss der Integrand $h(y)$ auf der anderen Seite von $f(a)$ bis $f(b)$ integriert werden (bzw. unbestimmt bis zur oberen Grenze $f(x)$). Um das unbestimmte Integral $\int h(y)\,dy$ auf dem oben beschriebenen Weg zu berechnen, muss man also noch die Umkehrfunktion $g(y) = f^{-1}(y)$ bilden können und als obere Grenze einsetzen:

$$\int g(y)\,dy = \int^{g(y)} h(f(x))f'(x)\,dx + \text{const} \qquad (g = f^{-1}).$$

3) Hat man es mit einem Integral $\int h(f(x))\,dx$ zu tun, bei dem der Faktor $f'(x)$ der Substitutionsregel fehlt, so kann man versuchen, diesen Faktor "einzuschmuggeln". Lässt sich $f'(x) = k(f(x)) \neq 0$ als Funktion von $f(x)$ ohne Nullstelle ausdrücken, so erhält man

$$\int h(f(x))\,dx = \int \frac{h(f(x))}{k(f(x))} \cdot f'(x)\,dx = \int^{f(x)} \frac{h(y)}{k(y)}\,dy + \text{const}\,,$$

was auf die Substitution von y für $f(x)$ und $\dfrac{dx}{dy}dy = \dfrac{1}{f'(x)}dy = \dfrac{1}{k(y)}dy$ für dx hinausläuft. ■

BEISPIELE (***zur Substitutionsregel***):

(1) Integranden vom Typ $\boldsymbol{h(f(x))f'(x)}$:

$$\int \frac{1}{x \ln x}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{1/f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'(x)}\,dx \underset{\substack{(\,y=\ln x,\\ h(y)=1/y)}}{=} \int^{\ln x} \frac{1}{y}\,dy = \ln(\ln x) + \text{const} \qquad (x > 1);$$

$$\int \underbrace{\cos x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{f(x)}\,dx \underset{\substack{(\,y=\sin x,\\ h(y)=y\,)}}{=} \int^{\sin x} y\,dy \;+\; \text{const} = \frac{1}{2}\sin^2 x + \text{const}$$

oder

$$\int \underbrace{\cos x}_{-f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{f'(x)}\,dx \underset{\substack{(\,y=-\cos x,\\ h(y)=-y\,)}}{=} \int^{-\cos x} -y\,dy + \text{const} = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \text{const}\,.$$

Man bekommt — wie oft beim unbestimmten Integrieren — zwei verschiedene Ausdrücke für zwei auf verschiedenem Wege berechnete Integrale. Die Ergebnisse können sich aber bei korrekter Rechnung nur um eine Konstante unterscheiden (wie auch hier wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$).

Wichtige Spezialfälle von Integranden der Form $h(f(x))f'(x)$ ergeben sich mit $h(y) = y^s$, $h(y) = \dfrac{1}{y}$ und $h(y) = \mathrm{e}^y$:

$$\begin{aligned}
\int f(x)^s f'(x)\,dx &= \frac{1}{s{+}1} f(x)^{s+1} + \text{const} && (s \neq -1,\ f > 0),\\
\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx &= \ln(f(x)) + \text{const} && (f > 0),\\
\int \mathrm{e}^{f(x)} f'(x)\,dx &= \mathrm{e}^{f(x)} + \text{const}\,.
\end{aligned}$$

Einige konkrete Beispiele, die sich hier einordnen, sind:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1+x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx \;=\; \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2}^{\,3} + \text{const}\,,\\
\int \tanh x\;dx &= \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx \;=\; \ln(\cosh x) + \text{const} \;=\; \ln\Big(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\Big) + \text{const}\,,\\
\int \tan x\;dx &= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \;=\; -\ln(\cos x) + \text{const} \qquad (|x| < \tfrac{\pi}{2}),\\
\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \;=\; 2e^{\sqrt{x}} + \text{const} \qquad (x>0).
\end{aligned}$$

(2) Integranden vom Typ $h(f(x))$:

$$\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,dx \underset{\substack{(\,y=e^x,\ \frac{dy}{dx}=e^x,\\ dx=e^{-x}dy=\frac{1}{y}dy\,)}}{=} \int^{e^x} \frac{y^3}{1+y^2}\,\frac{1}{y}\,dy \;=\; \int^{e^x}\Big(1-\frac{1}{1+y^2}\Big)\,dy$$
$$= e^x - \arctan(e^x) + \text{const}\,;$$

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\,dx \underset{\substack{(\,y=\sqrt{x+1},\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}/\sqrt{x+1},\\ dx=2\sqrt{x+1}dy=2ydy\,)}}{=} \int^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{1+y}\,2y\,dy \;=\; \int^{\sqrt{x+1}}\Big(2-\frac{2}{1+y}\Big)\,dy$$
$$= 2\sqrt{x+1} - 2\ln(1+\sqrt{x+1}) + \text{const} \qquad (x > -1).$$

(3) Die Verschiebungsregel und die Skalierungsregel sind Spezialfälle der allgemeinen Substitutionsregel:

$$s\int h(sx+c)\,dx \underset{\substack{(\,y=sx+c,\\ dy=sdx\,)}}{=} \int^{sx+c} h(y)\,dy + \text{const}\,.$$

(4) Hier noch ein Beispiel für fortgeschrittene Integrationstechnik:

$$\int \sqrt{\tan x}\,dx \underset{\substack{(\,y=\sqrt{\tan x},\ \frac{dy}{dx}=\\ \frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{y}+y^3)\,)}}{=} \int^{\sqrt{\tan x}} y\frac{1}{\frac{1}{2}(1/y+y^3)}\,dy \;=\; 2\int^{\sqrt{\tan x}} \frac{y^2}{1+y^4}\,dx + \text{const}\,.$$

Das letzte Integral hat eine rationale Funktion als Integranden, ist also mit Partialbruchzerlegung elementar berechenbar:

$$\begin{aligned}
\frac{y^2}{1+y^4} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{y}{1+y^2-\sqrt{2}\,y} - \frac{y}{1+y^2+\sqrt{2}\,y}\Big)\\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}(y-\frac{1}{\sqrt{2}})+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+(y-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}(y+\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+(y+\frac{1}{\sqrt{2}})^2}\,,
\end{aligned}$$

mit dem unbestimmten Integral

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\tfrac{1}{2}+(y-\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2\right]+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,y-1) \\ -\;&\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left[\tfrac{1}{2}+(y+\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2\right]+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}\,y+1)+\text{const}\,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $\sqrt{\tan x}$ für y ergibt sich schließlich für das zu berechnende Integral (Verifikation durch Differenzieren der rechten Seite!):

$$\begin{aligned} \int\sqrt{\tan x}\,dx \;=\; &\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+(\sqrt{2\tan x}-1)^2}{1+(\sqrt{2\tan x}+1)^2}\right) \\ &+\;\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2\tan x}-1)\;+\;\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2\tan x}+1)\;+\;\text{const}\,. \end{aligned}$$ ■

BEMERKUNGEN: **1)** Die Kunst beim Integrieren mit der Substitutionsregel ist, eine Substitution zu finden, die "funktioniert", d.h. auf einen Integranden führt, der bekanntermaßen oder aufgrund weiterer Rechenschritte eine elementare Stammfunktion hat. Dafür gibt es kein Patentrezept. Es gibt auch keine Garantie, dass überhaupt eine geeignete Substitution existiert. Daher ist manchmal nach vielen vergeblichen Integrationsversuchen immer noch unklar, ob sich das Integral in "geschlossener Form", d.h. mit einer elementaren Stammfunktion des Integranden, berechnen lässt. Wenn allerdings bei der Anwendung der Integrationsrechenregeln ein Integrand auftaucht, von dem man weiß, dass er *nicht* elementar integrierbar ist, so kann auch das ursprünglich vorgelegte Integral nicht elementar berechenbar sein, und alle weiteren Integrationsversuche kann man sich sparen. Deshalb ist es nützlich, auch ein kleine Liste von häufig auftretenden **nicht elementar integrierbaren Funktionen** zu kennen:

$$\mathrm{e}^{x^2},\qquad \mathrm{e}^{-x^2},\qquad \frac{\mathrm{e}^x}{x},\qquad \frac{\sin x}{x},\qquad \frac{\cos x}{x},\qquad \frac{\ln x}{1+x},\qquad r(x)\sqrt{p(x)}$$

mit einer rationalen Funktion $r(x)$ und einem Polynom $p(x)$ vom Grad ≥ 3.

Die Integrale der letzten Form $\int r(x)\sqrt{p(x)}\,dx$ heißen *elliptische Integrale* und sind im Allgemeinen nicht elementar. Typische Beispiele sind

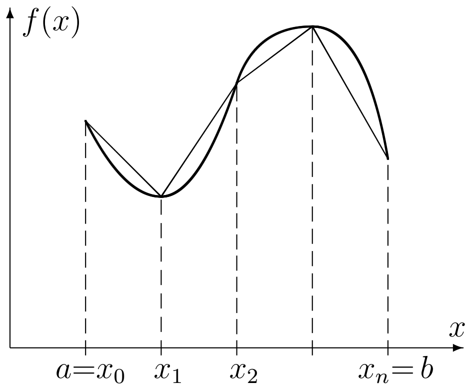
$$\int\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}\,dx \quad\text{oder}\quad \int\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx=\int\frac{1}{2-x^2}\sqrt{(1-x^2)(2-x^2)}\,dx\,.$$

Ist beispielsweise das Integral $\int\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\,dx$ vorgelegt, so findet man mit der Substitution $y=\sqrt{x}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2y}$:

$$\int\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}\,dx=\int^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{e}^{y^2}}{y}\,2y\,dy=2\int^{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{y^2}dy+\text{const}\,,$$

und da das letzte Integral bekanntermaßen nicht elementar ist, kann auch das erste Integral nicht elementar sein. (Aus einer elementaren Stammfunktion $F(x)$ zu $\mathrm{e}^x/\sqrt{x}$ würde man nämlich eine elementare Stammfunktion $G(y)=\frac{1}{2}F(y^2)$ zu e^{y^2} gewinnen — die gibt es aber nicht.)

2) Was kann man tun, wenn keine elementare Stammfunktion des Integranden existiert oder wenn keine gefunden werden konnte? Es bleibt dann (von seltenen Ausnahmen abgesehen, bei denen man mit fortgeschrittenen Methoden ein bestimmtes Integral mit ganz konkreten Grenzen berechnen kann, ohne eine elementare Stammfunktion des Integranden zu kennen) nur die *numerische Integration*, mit der sich ein bestimmtes Integral näherungsweise, im Prinzip sogar beliebig genau, berechnen lässt. Eine Möglichkeit hierfür ist, auf die Definition des bestimmten Integrals zurückzugreifen und Ober– bzw. Untersummen zu immer feineren Zerlegungen des Integrationsintervalls zu berechnen. Besser ist die sog. *Trapezregel*, wobei das Integrationsintervall $[a, b]$ durch (z.B. äquidistante) Teilungspunkte x_i zerlegt und der (stetige) Integrand f über jedem Teilintervall durch die affin lineare Funktion ersetzt wird, die in den Randpunkten des Teilintervalls mit dem Integranden übereinstimmt. Man bildet dann über jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ das Integral $\frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i)) \cdot (x_i - x_{i-1})$ dieser linearen Funktion (also den Flächeninhalt eines Trapezes) und addiert diese Werte. Das gibt schon bei mäßig feiner Einteilung des Integrationsintervalls oft eine sehr gute Approximation des gesuchten Integralwertes $\int_a^b f(x)\,dx$. Die numerische Analysis stellt genaue Fehlerabschätzungen für dieses und für zahlreiche weitere approximativen Integrationsverfahren zur Verfügung.



3) *Mehrdimensionale Integration* kommt in der Wirtschaftsmathematik selten vor und kann auf Integration bzgl. jeweils einer reellen Veränderlichen zurückgeführt werden. Für stetige Funktionen $f(x, y)$ auf einem Rechteck $R = [a, b] \times [c, d]$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gilt zum Beispiel:

$$\int_R f(x, y)\,dxdy \;=\; \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \;=\; \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy\,.$$

Das Integral links kann gedeutet werden als der Rauminhalt des Körpers zwischen dem Rechteck R in der Zeichenebene und dem Graphen von f über diesem Rechteck (wenn $f \geq 0$ ist). Das erste *iterierte Integral* rechts ist so zu verstehen: Im inneren Integral wird bei festem x die Funktion $y \mapsto f(x, y)$ von c bis d integriert; das Ergebnis $J(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$ ist dann eine Funktion des Parameters x und wird von a bis b integriert, so dass das iterierte Integral gleich $\int_a^b J(x)\,dx$ ist. So lässt sich also das zweidimensionale Integral links durch zwei eindimensionale Integrationen berechnen. Das Ergebnis hängt dabei nicht von der Reihenfolge dieser Integrationen ab, d.h. man kann auch $\int_c^d [\int_a^b f(x, y)\,dx]\,dy$ berechnen, wenn das praktischer erscheint. ■

Wir schließen die Ausführungen über Integralrechnung mit einigen Beispielen zur Anwendung der Integration auf ökonomische Aufgabenstellungen. Die dabei auftretenden ökonomischen Größen und ihre Darstellung durch bestimmte Integrale haben wir nach der Definition des bestimmten Integrals schon erläutert.

BEISPIELE (***ökonomische Anwendungen der Integralrechnung***):

(1) Ein kontinuierlicher Zahlungsstrom fließe mit einer konstanten Rate 1 000 € pro Monat, beginnend mit dem 3. Jahr und für die Dauer von 6 Jahren, zu einem Anfangskapital $K_0 = 100\,000$ €. Zu bestimmen ist das Kapital K_8 nach 8 Jahren bei Verzinsung mit 6 % p.a.

Lösung: Der konforme Jahreszinsfuß r % für kontinuierliche Verzinsung ist gegeben durch $\frac{r}{100} = \ln(1+\frac{6}{100}) = \ln 1.06 = 0.05827$, der **Gegenwartswert des Zahlungsstroms** ist daher (untere Grenze 2, weil der Strom mit dem Ablauf des zweiten Jahres beginnt):

$$\int_2^8 \mathrm{e}^{-rt/100} R\,dt = \frac{12\,000}{r/100}(-\mathrm{e}^{-8r/100} + \mathrm{e}^{-2r/100}) = 54\,077.01 \ \ (€);$$

denn die konstante Flussrate ist $R = 12\,000$ € pro Jahr. (Wie immer muss alles auf die Zeiteinheit 1 Jahr bezogen werden!) Durch Aufzinsung mit dem Aufzinsungsfaktor $\mathrm{e}^{8r/100}$ für 8–jährige kontinuierliche Verzinsung folgt:

$$K_8 = \mathrm{e}^{8r/100}\left[K_0 + \int_2^8 \mathrm{e}^{-rt/100} R\,dt\right] \;=\; 245\,575,35 \ \ (€).$$

Interessanterweise ist der **Gegenwartswert eines ewigen Zahlungsstroms** mit konstanter Rate endlich, nämlich, wenn er zum Zeitpunkt $T_0 \geq 0$ beginnt:

$$\int_{T_0}^{\infty} \mathrm{e}^{-rt/100} R\,dt \;=\; \lim_{T\to\infty} \frac{-R}{r/100}\,\mathrm{e}^{-rt/100}\Big|_{t=T_0}^{t=T} \;=\; \frac{R}{r/100}\,\mathrm{e}^{-rT_0/100}.$$

Setzt der ewige Zahlungsstrom in der Gegenwart $T = T_0$ ein, so ist sein Gegenwartswert also $100\frac{R}{r}$.

(2) Es werde nun ein *linear progressiver Zahlungsstrom* angenommen, bei dem die Flussrate von 0 zu Beginn des 3. Jahres auf 2 000 € pro Monat am Ende des 8. Jahres anwächst. Wieder ist K_8 zu bestimmen bei Zinsfuß 6 % p.a.

Lösung: Jetzt ist $R(t) = 0$ für $t = 2$ und $R(t) = 24\,000$ für $t = 8$, wegen der angenommenen Linearität also $R(t) = 4\,000 \cdot (t-2)$ für $2 \leq t \leq 8$. Der **Gegenwartswert des Zahlungsstroms** ist somit nun (das Integral wird mit Produktintegration berechnet, s.o.):

$$\begin{aligned}\int_2^8 \mathrm{e}^{-rt/100} R(t)\,dt &= 4\,000\int_2^8 (t-2)\,\mathrm{e}^{-rt/100}dt \;=\; 4\,000\cdot\tfrac{-100}{r}(t-2+\tfrac{100}{r})\mathrm{e}^{-rt/100}\Big|_{t=2}^{t=8}\\ &= \frac{4\,000}{(r/100)^2}\left[-(1+0.06r)\mathrm{e}^{-8r/100} + \mathrm{e}^{-2r/100}\right] \;=\; 50\,932,40 \ \ (€).\end{aligned}$$

Dieser Wert ist niedriger als der Gegenwartswert in (1), obwohl hier die Gesamtzahlung $\int_2^8 R(t)\,dt = 4\,000\int_2^8 (t-2)\,dt = 72\,000$ (€) dieselbe ist. Der Grund ist der nun gegenüber (1) verzögerte Ablauf der Zahlungseingänge. Der Kapitalwert nach 8 Jahren ist somit

$$K_8 = \mathrm{e}^{8r/100}\left[K_0 + \int_2^8 \mathrm{e}^{-rt/100} R(t)\,dt\right] \;=\; 240\,563,32 \ \ (€).$$

(3) Der Gegenwartswert eines im Zeitintervall $[T_0, T_1]$ fließenden kontinuierlichen Zahlungsstroms $R(t)$ bei *zeitlich veränderlichem Zinsfuß* $p(t)$ ist das Integral

$$\int_{T_0}^{T_1} \mathrm{e}^{-r(t)\cdot t/100} R(t)\, dt \qquad \text{mit} \quad \frac{r(t)}{100} = \ln\left(1 + \frac{p(t)}{100}\right).$$

Dieses Integral ist schon unter den einfachsten Annahmen, etwa R konstant und $p(t)$ oder $r(t)$ linear abhängig von t (aber nicht konstant), nicht mehr elementar integrierbar. Die Annahme $\frac{r(t)}{100} = ct + d$ führt zum Beispiel auf das Integral $\int \mathrm{e}^{-ct^2-dt}dt = \mathrm{e}^{d^2/4c} \int \mathrm{e}^{-c(t+d/2c)^2} dt$ das mit Verschiebungsregel und Skalierungsregel in das nichtelementare Integral $\int \mathrm{e}^{\pm y^2} dy$ übergeht.

(4) Bei einer *Investition* wird nach der Anfangsausgabe $A_0 = 1$ Mio € ein degressiver Ausgabenfluss $a(t) = 2(5-t)$ (Mio € pro Jahr) für 5 Jahre erwartet, danach $a(t) = 0$ für $t \geq 5$, und ab dem dritten Jahr ein progressiver Einnahmefluss $e(t) = t-2$ (Mio € pro Jahr), $e(t) = 0$ für $0 \leq t \leq 2$. Zu berechnen ist der **Kapitalwert** C_0 der Investition, wenn nach 10 Jahren ein Restwert von $R_{10} = 5$ Mio € verbleibt, alles mit Eigenkapital finanziert wird und der marktübliche Zinsfuß für Einlagen 6 % p.a. ist.

Lösung: Bei Eigenkapitalfinanzierung sind Einnahmen und Ausgaben mit dem Habenzinsfuß zu verzinsen, entsprechend den kontinierlichen Geldströmen wird kontinuierlich verzinst mit dem Zinsfuß $\frac{r}{100} = \ln(1 + \frac{6}{100}) = 0.05872$. Der Gegenwartswert der erwarteten Einnahme– und Ausgabeströme ist also (die Integrale sind mit Produktintegration wie in (2) berechenbar):

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} \mathrm{e}^{-rt/100}[e(t) - a(t)]\, dt &= \int_2^{10} \mathrm{e}^{-rt/100} e(t)\, dt - \int_0^5 \mathrm{e}^{-rt/100} a(t)\, dt \\
&= \int_2^{10} \mathrm{e}^{-rt/100}(t-2)\, dt - \int_0^5 \mathrm{e}^{-rt/100} 2(5-t)\, dt \\
&= -\tfrac{100}{r}(t - 2 + \tfrac{100}{r})\mathrm{e}^{-rt/100}\Big|_{t=2}^{t=10} + \tfrac{200}{r}(5 - t - \tfrac{100}{r})\mathrm{e}^{-rt/100}\Big|_{t=0}^{t=5} \\
&= \frac{-(0.08r+1)\mathrm{e}^{-10r/100} + \mathrm{e}^{-2r/100} - 2\mathrm{e}^{-5r/100} + (0.1r-2)}{(r/100)^2} = 12\,106\,.
\end{aligned}$$

Den Kapitalwert (Gegenwartswert) der Investition insgesamt erhält man durch Subtraktion der Anfangsausgabe und Addition des abgezinsten Restwerts:

$$C_0 = -A_0 + \mathrm{e}^{-10r/100} R_{10} + 12\,106 = 13\,898 \ (\text{Mio €})\,.$$

(5) Was ist der **Kapitalwert** $\widetilde{C}_0$ der Investition aus (4) bei völliger Fremdfinanzierung und Habenzinsfuß 6 %, Sollzinsfuß 9 % ?

Lösung: Einnahmen werden nun zum Schuldenabbau verwendet, solange die Gesamtausgaben die Gesamteinnahmen übersteigen. Bis zu diesem "break–even–Zeitpunkt" T_1 ist alles mit dem kontinuierlichen Sollzinsfuß $\frac{s}{100} = \ln(1+\frac{9}{100})$ abzuzinsen, danach mit $\frac{r}{100} = \ln(1 + \frac{6}{100})$. Die Gesamtausgaben bis zum Zeitpunkt T sind $A(T) = A_0 + \int_0^T a(t)\, dt = A_0 + \int_0^T 2(5 - t)\, dt = 26 - (5-T)^2$ für $0 \leq T \leq 5$ bzw. $A(T) = 26$ für $T > 5$ (alle Zahlenangaben in Mio €). Die Gesamteinnahmen sind $E(T) = 0$ für $T \leq 2$ und

$E(T) = \int_2^T e(t)\,dt = \int_2^T (t-2)\,dt = \frac{1}{2}(T-2)^2$ für $2 \le T < 10$. Gleichsetzen $A(T) = E(T)$ führt (da $E(T) < 26$ ist für $T \le 5$) auf die Gleichung $26 = \frac{1}{2}(T-2)^2$ für die break–even–zeit T_1, also ist $T_1 = 2 + \sqrt{52} = 9.211$ (Jahre). Der Gegenwartswert der Einnahme– und Ausgabeflüsse ist daher:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{T_1} \mathrm{e}^{-st/100}[e(t)-a(t)]\,dt + \int_{T_1}^{10} \mathrm{e}^{-rt/100}[e(t)-a(t)]\,dt \\
= \;& \int_2^{T_1} \mathrm{e}^{-st/100}(t-2)\,dt - \int_0^5 \mathrm{e}^{-st/100}2(5-t)\,dt + \int_{T_1}^{10} \mathrm{e}^{-rt/100}(t-2)\,dt \\
= \;& -\tfrac{100}{s}(t-2+\tfrac{100}{s})\mathrm{e}^{-st/100}\Big|_{t=2}^{t=T_1} + \tfrac{200}{s}(5-t-\tfrac{100}{s})\mathrm{e}^{-st/100}\Big|_{t=0}^{t=5} - \tfrac{100}{r}(t-2+\tfrac{100}{r})\mathrm{e}^{-rt/100}\Big|_{t=T_1}^{t=10} \\
= \;& \frac{-((T_1-2)\frac{s}{100}+1)\mathrm{e}^{-sT_1/100} + \mathrm{e}^{-2s/100} - 2\mathrm{e}^{-5s/100} + 10\frac{s}{100}-2}{(s/100)^2} \\
& - \frac{(8\frac{r}{100}+1)\mathrm{e}^{-10r/100} + ((T_1-2)\frac{r}{100}+1)\mathrm{e}^{-rT_1/100}}{(r/100)^2} \\
= \;& -3\,717 \ \text{(Mio €)}\,.
\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir noch die Anfangsausgabe und den abgezinsten Restwert, so ergibt sich hier als Kapitalwert der Investition:

$$\widetilde{C}_0 \;=\; -A_0 + \mathrm{e}^{-10r/100}R_{10} - 3\,717 \;=\; -1\,925 \ \text{(Mio €)}\,.$$

Dieser Wert ist negativ, was signalisiert, dass die Investition mit reiner Fremdfinanzierung ungünstig ist. Der positive Kapitalwert bei Eigenfinanzierung in (4) deutet dagegen an, dass die Investition vorteilhaft ist: Das Ergebnis nach 10 Jahren ist dort so, als hätte man 13 898 Mio € zum Marktzins 6 % zusätzlich zu dem vorhandenen Eigenkapital angelegt. Natürlich kann die unternehmerische Entscheidung über die Durchführung oder Unterlassung einer Investition nicht allein auf die Berechnung des Kapitalwerts gestützt werden, die von geschätzten Einnahme– und Ausgabeflüssen und unsicheren Zinsfüßen abhängt. Die Kapitalwertmethode kann aber immerhin einen ersten Hinweis zur Beurteilung geben. (Ob man dafür allerdings kontinuierliche Zahlungsströme annehmen und Integralrechnung einsetzen sollte, statt einfach diskreter Zahlungsvorgänge am Beginn oder Ende der einzelnen Jahre, mag dahingestellt bleiben.)

(6) Bei der Diskussion der Investition in (4) und (5) hatten wir eine 10–jährige Laufzeit vorgegeben. In der Praxis hat man aber die günstigste Laufzeit, die **optimale Nutzungsdauer der Investition**, herauszufinden. Eine Methode hierfür besteht darin, den Kapitalwert zur Laufzeit T

$$C_0(T) = -A_0 + \mathrm{e}^{-rT/100}R(T) + \int_0^T \mathrm{e}^{-rt/100}[e(t) - a(t)]\,dt$$

zu maximieren. (Wir nehmen Eigenfinanzierung wie in (4) an und bezeichnen mit $R(T)$ den Restwert nach der Zeit T.) Die notwendige Bedingung $\frac{d}{dT}C_0(T) = 0$ für Extremstellen erfordert hier die Differentiation des Integrals nach der oberen Grenze, was gemäß (erstem) Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung den Integranden an der Stelle $t = T$ ergibt. Als *notwendige Bedingung für ein Maximum des Kapitalwerts* als Funktion der Nutzungsdauer T erhalten wir damit die Gleichung:

$$0 = \frac{d}{dT}C_0(T) = \mathrm{e}^{-rT/100}[e(T) - a(T)] + \left(\frac{d}{dT}R(T) - \frac{r}{100}\,R(T)\right)\mathrm{e}^{-rT/100}$$

beziehungsweise äquivalent

$$e(T) = a(T) + \frac{r}{100}\,R(T) - \frac{d}{dT}R(T)\,.$$

Solange der Einnahmefluss $e(T)$ noch größer ist als die rechte Seite dieser Gleichung, ist $\frac{d}{dT}C_0(T) > 0$, also wächst der Kapitalwert in diesem Bereich; dies wird normalerweise für kleine Werte von $T > 0$ der Fall sein. Zu einem späteren Zeitpunkt wird aber der Einnahmefluss kleiner als die rechte Seite sein, so dass der Kapitalwert fällt. Den Zeitpunkt T, für den Gleichheit eintritt, nimmt man bei dieser Methode als optimale Nutzungsdauer der Investition (und normalerweise gibt es nur eine Lösung $T > 0$ der Gleichung). Die Terme $\frac{r}{100}R(T)$ bzw. $-\frac{d}{dT}R(T)$ kann man interpretieren als Ausgaben, die durch Zinsverzicht auf nicht realisierten Liquidierungserlös und durch Wertverlust entstehen.

(7) Eine andere Methode der Laufzeitoptimierung (mit anderem Ergebnis — es kommt eben immer darauf an, *welche* Größe optimiert wird) besteht darin, mittels

$$C_0(T) = \int_0^T \mathrm{e}^{-rt/100} S\,dt = \frac{S}{r/100}(1 - \mathrm{e}^{-rT/100})$$

den Kapitalwert in einen *äquivalenten konstanten Gewinnstrom* umzurechnen, der über die Laufzeit T mit der konstanten Rate

$$S = \frac{r}{100} \cdot \frac{C_0(T)}{1 - \mathrm{e}^{-rT/100}}$$

fließt. Man stellt sich dabei vor, dass die Investition am Nutzungsende sofort in identischer Form erneuert wird, so dass der Gewinnstrom ewig fließt. Die *notwendige Bedingung für einen maximalen Gewinnstrom* ergibt sich durch Differenzieren von S nach dem Laufzeitparameter T mit der Quotientenregel zu $(1 - \mathrm{e}^{-rT/100})\frac{d}{dT}C_0(T) - \frac{r}{100}\mathrm{e}^{-rT/100}C_0(T)$. Setzt man hier $C_0(T)$ aus (6) und die dort berechnete Ableitung davon ein, so erhält man als äquivalente Bedingung für die optimale Laufzeit:

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-rT/100}}{r}\left[e(T) - a(T) + \frac{d}{dT}R(T)\right] = -A_0 + R(T) + \int_0^T \mathrm{e}^{-rt/100}[e(t) - a(t)]\,dt\,.$$

Dies ist nun eine sehr viel kompliziertere "Integralgleichung" für die gesuchte optimale Laufzeit T als die Gleichung, die sich in (6) bei der Kapitalwertmaximierung ergab. Man sieht, dass die optimale Laufzeit hier — anders als in (6) — auch von der Anfangsausgabe A_0 abhängt und daher im Allgemeinen einen anderen Wert hat, als die mit der Kapitalwertmaximierung in (6) bestimmte optimale Nutzungsdauer. ■