

# Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

## Vorlesungsprogramm für den 05. 06. 2007

(K. Steffen, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, SS 2007)

### BEISPIELE (*Anwendung der Kriterien zweiter Ordnung*):

(1) Wir betrachten die Funktionen von zwei Variablen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 2x - 2y$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 2x - 2y$$

$$h(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$$

Berechnung der kritischen Punkte:

$$\nabla f(x, y) = (2x - y + 2, 2y - x - 2) = (0, 0) \iff (x, y) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\nabla g(x, y) = (2x - 3y + 2, 2y - 3x - 2) = (0, 0) \iff (x, y) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right),$$

$$\nabla h(x, y) = (2x - 2y + 2, 2x - 2x - 2) = (0, 0) \iff (x, y) = (x, x + 1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Die Hesse-Matrix ist für alle drei Funktionen konstant auf  $\mathbb{R}^2$ , da es sich um Polynomfunktionen vom Grad 2 handelt, und zwar:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x, y)}\right) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial^2 g}{\partial(x, y)}\right) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left(\frac{\partial^2 h}{\partial(x, y)}\right) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix von  $f$  ist positiv definit (nach dem Minorenkriterium, da die Diagonaleinträge positiv sind und auch die Determinante den positiven Wert 3 hat), also liegt in dem kritischen Punkt  $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  eine lokale strikte Minimumstelle vor. Tatsächlich ist dieser Punkt sogar die eindeutige Minimumstelle von  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , wie man an der Tatsache erkennt, dass  $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(x - y)^2 + 2x - 2y \rightarrow \infty$  geht bei  $|(x, y)| \rightarrow \infty$ , so dass  $f$  ein Minimum annimmt auf  $\mathbb{R}^2$ , was nur in dem einzigen kritischen Punkt passieren kann. Man bekommt also mit dem Ableitungskriterium erster Ordnung und der Überlegung bzgl. der Existenz hier viel mehr Information als mit dem Kriterium zweiter Ordnung. (Oder schreibe die Funktion mit quadratischer Ergänzung  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{2}(y - \frac{2}{3})^2 + \frac{1}{2}(x - y + \frac{4}{3})^2 - \frac{4}{3}$ , um das ganz ohne Differentialrechnung zu sehen.)

Die Hesse-Matrix von  $g$  ist indefinit, weil sie negative Determinante  $-5 < 0$  hat (und weil die Determinante einer positiv oder negativ semidefiniten  $2 \times 2$ -Matrix  $\geq 0$  ist). Also liegt in dem einzigen kritischen Punkt keine lokale Extremstelle vor, sondern ein Sattelpunkt. Aus der Tatsache, dass  $g(x, x) = -x^2$  beliebige negative Werte und  $g(x, -x) = 4x^2 + 4x$  beliebige positive Werte annimmt, kann man von vorneherein erkennen, dass der einzige kritische Punkt keine absolute Extremstelle auf  $\mathbb{R}^2$  sein kann. Das Kriterium zweiter Ordnung zeigt hier immerhin, dass es sich auch nicht um eine lokale Extremstelle handelt.

Die Hesse-Matrix von  $h$  hat positive Diagonaleinträge und Determinante = 0, ist also positiv semidefinit. Daraus kann man über die Natur der kritischen Punkte  $(x, x + 1)$  gar nichts schließen. Quadratische Ergänzung  $h(x, y) = (x - y + 1)^2 - 1$  zeigt hier, dass alle kritischen Punkte tatsächlich absolute Minimumstellen sind, aber keine davon eine strikte lokale Minimumstelle, weil die absoluten Minimumstellen eine Gerade  $y = x + 1$  bilden.

(2) Bei Funktionen  $f(x, y)$  von zwei Veränderlichen ist die Überprüfung der Definitheitseigenschaften der Hesse-Matrix besonders einfach, wie wir in (1) schon gesehen haben:

Die Hesse-Matrix  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial(x, y)}\right)$  ist

$$\text{positiv definit, genau wo} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0,$$

$$\text{negativ definit, genau wo} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0,$$

$$\text{positiv semidefinit, genau wo} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0,$$

$$\text{negativ semidefinit, genau wo} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0,$$

$$\text{indefinit, genau wo} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 < 0.$$

Man beachte die Vorzeichenbedingungen an die Determinante: Sie ist, weil es sich hier um  $2 \times 2$ -Matrizen handelt, auch bei einer negativ definiten Matrix positiv (!) und auch bei einer negativ semidefiniten Matrix nichtnegativ (!).

(3) Bei allgemeinen quadratischen Funktionen von  $n$  Variablen,

$$f(x) = \frac{1}{2}x \cdot Ax + \mathbf{b} \cdot x + c = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j + c,$$

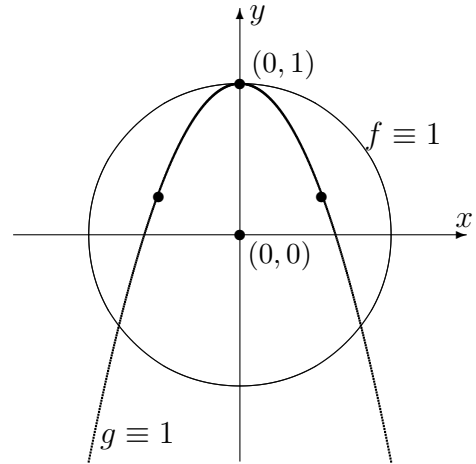
ist die Hesse-Matrix konstant gleich der symmetrischen Koeffizientenmatrix  $A = (a_{ij})$ ,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1\dots n} = (a_{ij})_{i,j=1\dots n} = A \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

(Und wenn man  $A = (a_{ij})$  nicht symmetrisch gewählt hat, so ist die Hesse-Matrix konstant gleich der Symmetrisierung  $\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ .) Also kann die quadratische Funktion höchstens dann Minimumstellen auf  $\mathbb{R}^n$  haben, wenn die Koeffizientenmatrix  $(a_{ij})$  positiv semidefinit ist. Außerdem sagt uns das hinreichende Kriterium zweiter Ordnung noch, dass jeder kritische Punkt eine lokale strikte Minimumstelle ist, wenn die Matrix  $(a_{ij})$  sogar positiv definit ist. (Aus der früheren Diskussion der Extremstellen quadratischer Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  in 5.5 wissen wir aber mehr: Im positiv definiten Fall gibt es genau einen kritischen Punkt und der ist eindeutige absolute Minimumstelle von  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$ .) Schließlich folgt aus dem Kriterium zweiter Ordnung noch, dass jeder kritische Punkt von  $f$  (sofern es welche gibt) ein Sattelpunkt sein muss, wenn  $(a_{ij})$  indefinit ist. ■

**BEMERKUNG und BEISPIEL:** Es gibt auch **Kriterien zweiter Ordnung für Extrema bei Nebenbedingungen** (sowohl notwendige Kriterien als auch hinreichende Kriterien). Diese sind jedoch relativ kompliziert und nicht von großer praktischer Bedeutung. (Man findet sie z.B. bei Rommelfanger, Bd.2, §§ 7.3, 7.4.) Die hinreichenden Kriterien liefern, wenn sie anwendbar sind, auch hier nur die Information, dass in einem Extremstellenkandidaten  $x_0$  ein striktes lokales Extremum vorliegt im Vergleich mit den Funktionswerten an allen anderen den Nebenbedingungen genügenden Punkten einer (kleinen) Umgebung. Wenn man absolute Extrema bei Nebenbedingungen sucht, so ist diese Information praktisch wertlos, weil die Größe der Umgebung nicht spezifiziert wird.

*Warnung:* Es ist nicht richtig, dass positive Definitheit der Hesse-Matrix  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0)\right)$  der Zielfunktion in einem Kandidaten  $x_0$  für Extremstellen bei den Nebenbedingungen  $g_1(x) = c_1, \dots, g_l(x) = c_l$ , also an einer den Nebenbedingungen genügenden Stelle  $x_0$  linearer Abhängigkeit der Gradienten  $\nabla f(x_0), \nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_l(x_0)$ , schon die strikte lokale Minimalität von  $x_0$  bei den Nebenbedingungen zur Folge hat. Dies zeigt das Beispiel der Zielfunktion  $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , bei der Nebenbedingung  $g(x, y) = 2x^2 + y = 1$ , d.h. der (halbe quadrierte) Abstand zum Ursprung ist auf der Parabel  $y = -2x^2 + 1$  zu optimieren. Hier sind  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  und  $(\pm\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{1}{4})$  die Stellen linearer Abhängigkeit von  $\nabla f(x, y) = (x, y)$  und  $\nabla g(x, y) = (4x, 1)$  auf der Parabel. Die Hesse-Matrix von  $f$  ist konstant gleich der  $2 \times 2$ -Einheits-Matrix, also überall positiv definit. Aber der Kandidat  $(0, 1)$  ist keine lokale Minimumstelle von  $f$  auf der Parabel, sondern vielmehr eine lokale strikte Maximumstelle! (Die beiden anderen Kandidaten sind absolute Minimumstellen von  $f$  auf der Parabel.)



Man sieht an diesem Beispiel, dass die Ableitungskriterien zweiter Ordnung bei Nebenbedingungen auch von zweiten Ableitungen der Funktionen  $g_h$  abhängen müssen, welche die Nebenbedingungen definieren. Ein einfaches, aber selten anwendbares, hinreichendes Kriterium zweiter Ordnung in diesem Sinne ist folgendes: Ist  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  kritischer Punkt einer Lagrange-Funktion  $L(x) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_l g_l(x)$  mit  $g_h(x_0) = c_h$  für  $h = 1 \dots l$  und ist die Hesse-Matrix von  $L$  an der Stelle  $x_0$  positiv definit, so hat  $L$  eine lokale strikte Minimumstelle in  $x_0$  relativ zu  $\mathbb{R}^n$ , und dann ist offenbar erst recht  $x_0$  eine lokale strikte Minimumstelle von  $f$  bei den Nebenbedingungen, weil ja  $\lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_l g_l(x)$  konstant gleich  $\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_l c_l$  ist für alle  $x$ , welche die Nebenbedingungen erfüllen. Auch mit der Parametrisierungsmethode kann man Kriterien zweiter Ordnung erhalten: Wenn  $h: \mathbb{R}^m \supset P \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n$  mit  $h(\xi_0) = x_0$  eine volle Umgebung  $S \cap U_\delta(x_0)$  von  $x_0$  in  $S$  auf dem offenen Parameterbereich  $P$  in  $\mathbb{R}^m$  bijektiv und stetig parametrisiert, so ist  $x_0$  genau dann lokale (strikte) Minimum- bzw. Maximumstelle von  $f$  auf  $S \subset \mathbb{R}^n$ , wenn  $\xi_0$  lokale (strikte) Minimum- bzw. Maximumstelle der Verkettung  $f \circ h$  auf dem offenen Parameterbereich  $P \subset \mathbb{R}^m$  ist. Daher kann man die Kriterien zweiter Ordnung für innere Extremstellen auf die Funktion  $f \circ h$  an der Stelle  $\xi_0$  anwenden und damit gegebenenfalls entscheiden, ob  $x_0 = h(\xi_0)$  lokale Extremstelle von  $f$  auf  $S$  ist oder nicht. ■

Die Hesse-Form bzw. die Hesse-Matrix einer reellen Funktion von mehreren Veränderlichen stehen in engem Zusammenhang mit Konvexität. Diese wird für Funktionen  $f$  von mehreren Variablen einfach dadurch erklärt, dass  $f$  auf jeder Strecke im (konvexen) Definitionsbereich eine konvexe Funktion einer einzigen Variablen ist. (Siehe 4.2 und 4.6 für eine Diskussion konvexer Funktionen von einer Veränderlichen.)

Für die folgende Definition erinnern wir daran, dass eine Teilmenge  $D$  von  $\mathbb{R}^n$  **konvexe Menge** in  $\mathbb{R}^n$  heißt, wenn mit je zwei Punkten  $x, \tilde{x} \in D$  auch ihre **Verbindungsstrecke**  $[x, \tilde{x}] = \{(1-t)x + t\tilde{x} : 0 \leq t \leq 1\}$  ganz in  $D$  enthalten ist.

**DEFINITION:** Eine skalare Funktion  $f: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (**streng**) **konvexe Funktion**, wenn  $D$  eine konvexe Menge ist und wenn  $f$  auf jeder Strecke  $[x, \tilde{x}] \subset D$  als Funktion von einer Variablen aufgefasst eine (streng) konvexe Funktion ist, wenn also die **Konvexitätsungleichung** gilt

$$f((1-t)x + t\tilde{x}) \leq (1-t)f(x) + tf(\tilde{x}) \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in D, 0 \leq t \leq 1$$

(mit Gleichheit im streng konvexen Fall nur für  $x = \tilde{x}$  oder  $t = 0$  oder  $t = 1$ ). Die Funktion  $f$  heißt (**streng**) **konkave Funktion** auf  $D$ , wenn ihr Negatives  $-f$  streng konvex ist. ■

**SATZ (über konvexe Funktionen):** Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und konvex und hat  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetige partielle Ableitungen erster (bei (ii) und (ii')) bzw. zweiter (bei (iii) und (iii')) Ordnung, so sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist konvexe Funktion auf  $D$ ;
- (ii)  $f$  ist auf  $D$  nicht kleiner als seine affin linearen Approximationen, d.h.

$$f(\tilde{x}) \geq f(x) + (\tilde{x} - x) \cdot \nabla f(x) \quad \text{für alle } x, \tilde{x} \in D;$$

- (iii) die Hesse-Form bzw. die Hesse-Matrix ist überall positiv semidefinit auf  $D$ , also

$$\partial_u^2 f(x) = u \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \right) u \geq 0 \quad \text{für alle } x \in D, u \in \mathbb{R}^n.$$

Außerdem folgen aus

- (iii') die Hesse-Matrix ist überall positiv definit auf  $D$ , also

$$\partial_u^2 f(x) = u \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \right) u > 0 \quad \text{für alle } x \in D, 0 \neq u \in \mathbb{R}^n;$$

die zueinander äquivalenten Bedingungen:

- (ii')  $f$  ist auf  $D$  echt größer als seine affin linearen Approximationen, d.h.

$$f(\tilde{x}) > f(x) + (\tilde{x} - x) \cdot \nabla f(x) \quad \text{für alle } x \neq \tilde{x} \text{ in } D;$$

- (i')  $f$  ist streng konvexe Funktion auf  $D$ .

Der Beweis ergibt sich aus dem entsprechenden Satz für Funktionen  $\varphi(t)$  von einer reellen Veränderlichen  $t$  in 4.6. Danach ist  $\varphi$  (streng) konvex, genau wenn  $\varphi(t) \underset{(>)}{\geq} \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0)$  ist für alle  $t \neq t_0$  im Definitionsintervall bzw. wenn  $\varphi''(t) \geq 0$  ist für alle  $t$  (und dabei auf keinem Intervall positiver Länge Gleichheit eintritt). Das wendet man an auf  $\varphi(t) = f(x + tu)$  mit  $\varphi'(t) = u \cdot \nabla f(x + tu)$  und  $\varphi''(t) = \partial_u^2 f(x + tu)$  und erhält sofort die Aussagen des obigen Satzes (mit der Wahl  $u = \tilde{x} - x$  bei (ii) und (ii')).

**BEMERKUNGEN:** (1) Die Bedeutung der Charakterisierung (ii) konvexer Funktionen  $f$  besteht darin, dass man bei Linearisierung um eine Stelle  $x$  das **Vorzeichen des Linearisierungsfehlers**  $f(x + v) - f(x) - v \cdot \nabla f(x) \geq 0$  kennt; der Linearisierungsfehler ist nie negativ, weil die Linearisierungen eben die Funktionswerte unterschätzen. Bei konkaven Funktionen überschätzen die Linearisierungen dagegen stets die Funktionswerte.

Geometrisch bedeutet die Aussage (ii'), dass *der Graph von streng konvexen Funktionen über seinen Tangentialräumen verläuft* — abgesehen vom jeweiligen Berührungspunkt natürlich. Streng konkave Funktionen sind dagegen dadurch gekennzeichnet, dass ihr Graph unterhalb aller Tangentialräume liegt.

(2) Die Bedingung (iii') der positiven Definitheit der Hesse-Matrix an allen Stellen des offenen und konvexen Definitionsbereichs, könnte man **definite Konvexität** nennen. Diese Bedingung ist stärker als strenge Konvexität, weil die Hesse-Matrix von streng konvexen Funktionen durchaus an einzelnen Stellen einen oder sogar alle Eigenwerte Null haben kann, wie z.B.  $f(x) = |x|^4 = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^2$  im Ursprung  $x = 0$ . Eine konvexe Funktion  $f$  ist genau dann streng konvex, wenn sie auf keiner Strecke positiver Länge im Definitionsbereich  $D$  affin linear ist, d.h. wenn für kein  $0 \neq u \in \mathbb{R}$  die zweite Richtungsableitung  $\partial_u^2 f$  auf einer Strecke positiver Länge mit Richtung  $u$  verschwindet. Für Konkavität gelten analoge Aussagen; insbesondere ist **definite Konkavität**, d.h. negative Definitheit der Hesse-Matrix an allen Stellen des offenen und konvexen Definitionsbereichs, eine etwas stärkere Eigenschaft als strenge Konkavität. ■

**BEISPIELE:** (1) Wir betrachten nochmal die Funktionen von zwei Variablen

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 2x - 2y$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy + 2x - 2y$$

$$h(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y$$

Die Hesse-Matrizen haben wir in der letzten Beispielsreihe schon berechnet. Sie sind für alle drei Funktionen konstant auf  $\mathbb{R}^2$ , da es sich um Polynomfunktionen vom Grad 2 handelt, und zwar:

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial(x, y)} \right) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left( \frac{\partial^2 g}{\partial(x, y)} \right) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \left( \frac{\partial^2 h}{\partial(x, y)} \right) \equiv \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix von  $f$  ist positiv definit, also ist  $f$  streng konvexe Funktion auf  $\mathbb{R}^2$  (sogar definit konvex). Die Hesse-Matrix von  $g$  ist indefinit, also ist  $g$  weder konvex noch konkav auf irgendeiner offenen, konvexen Menge in  $\mathbb{R}^2$ . Die Hesse-Matrix von  $h$  schließlich ist positiv semidefinit und nicht Null, also ist  $h$  konvexe Funktion auf  $\mathbb{R}^3$ . Die Richtung  $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  ist ein Eigenvektor der Hesse-Matrix von  $h$  zum Eigenwert Null (an jeder Stelle, weil die Hesse-Matrix ja konstant ist). Daher ist  $\partial_u^2 h \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}^2$ , d.h.  $h$  ist auf jeder Geraden mit Richtung  $u$  affin linear (sogar konstant, weil auch  $\partial_u h \equiv 0$  ist) und somit auf keiner offenen konvexen Menge eine streng konvexe Funktion.

(2) Bei allgemeinen quadratischen Funktionen von  $n$  Variablen,

$$f(x) = \frac{1}{2}x \cdot Ax + \mathbf{b} \cdot x + c = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^n b_j x_j + c,$$

ist, wie schon gesehen, die Hesse-Matrix konstant gleich der symmetrischen Koeffizientenmatrix  $A = (a_{ij})$ . Daher ist eine solche Funktion genau dann konvex (bzw. konkav), wenn die Koeffizientenmatrix  $A$  positiv semidefinit ist (bzw. negativ semidefinit). Hat  $A$  einen Eigenvektor  $u$  zum Eigenwert 0, so gilt  $0 = u \cdot Au = \partial_u^2 f(x)$  an allen Stellen  $x \in \mathbb{R}^n$ , also ist dann  $f$  affin linear auf allen Geraden in Richtung  $u$  und deshalb auf keiner offenen, konvexen Menge streng konvex oder streng konkav. Somit sind für quadratische Funktionen  $f$  strenge Konvexität und definite Konvexität äquivalent, d.h.  $f$  ist genau dann streng konvexe Funktion auf  $\mathbb{R}^n$ , wenn die Koeffizientenmatrix  $A$  positiv definit ist (und genau dann streng konkav, wenn  $A$  negativ definit ist).

(3) Wir untersuchen *Potenzen der Euklidischen Normfunktion*  $x$  (Abstand zum Ursprung)

$$|x|^s = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{s/2}$$

bezüglich Konvexität / Konkavität auf  $\mathbb{R}^n$  bei Dimensionen  $n \geq 2$ . Für  $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$  ist  $\frac{\partial |x|^s}{\partial x_j} = \frac{s}{2}(|x|^2)^{s/2-1} 2x_j = sx_j|x|^{s-2}$  und weitere Differentiation gibt

$$\frac{\partial^2 |x|^s}{\partial x_i \partial x_j} = s(s-2)|x|^{s-4}x_i x_j \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 |x|^s}{\partial x_j^2} = s(s-2)|x|^{s-4}x_j^2 + s|x|^{s-2}.$$

Für  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  folgt

$$\begin{aligned} u \cdot \left( \frac{\partial^2 |x|^s}{\partial x^2} \right) u &= \sum_{i,j=1}^n u_i \frac{\partial^2 |x|^s}{\partial x_i \partial x_j} u_j = s|x|^{s-2} \sum_{j=1}^n u_j^2 + s(s-2)|x|^{s-4} \sum_{i,j=1}^n u_i x_i x_j u_j \\ &= s|x|^{s-2}|u|^2 + s(s-2)|x|^{s-4} \left( \sum_{j=1}^n u_j x_j \right)^2 = s|x|^{s-4} [|x|^2|u|^2 + (s-2)(x \cdot u)^2]. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist offenbar positiv für alle  $x \neq 0$  und  $u \neq 0$ , wenn  $s \geq 2$  ist, aber auch für  $1 < s < 2$  wegen der Cauchy–Schwarz–Ungleichung  $|x \cdot u| \leq |x||u|$  (siehe 3.5 und 5.2). Aus dem obigen Konvexitätssatz folgt damit, dass  $|x|^s$  für  $s > 1$  streng konvex ist auf jeder Geraden in  $\mathbb{R}^n$ , die nicht durch den Ursprung geht. Auf Ursprungsgeraden  $\mathbb{R}u$  aber ist  $|x|^s$  für  $s > 1$  ebenfalls streng konvex, weil  $\frac{d}{dt}|tu|^s = \frac{d|t|^s}{dt}|u| = s|t|^{s-1} \text{sign}(t)|u|$  streng wachsend bzgl.  $t \in \mathbb{R}$  ist, also ist  $|x|^s$  für  $s > 1$  streng konvex auf ganz  $\mathbb{R}^n$ . Für  $s = 1$  zeigen dieselben Überlegungen oder direkt die Dreiecksungleichung  $|(1-t)x + t\tilde{x}| \leq (1-t)|x| + t|\tilde{x}|$  für  $0 \leq t \leq 1$  noch Konvexität der Normfunktion auf  $\mathbb{R}^n$ ; aber auf Ursprungsstrahlen  $\mathbb{R}_{\geq 0}u$  ist nun  $|tu| = t|u|$  linear, also ist die Konvexität nicht mehr streng. (Da in der Cauchy–Schwarz–Ungleichung Gleichheit  $|x \cdot u| = |x||u|$  nur bei linearer Abhängigkeit von  $x$  und  $u$  eintritt, sind die Strecken auf Ursprungsgeraden auch die einzigen Strecken, auf denen die Normfunktion nicht streng konvex ist.) Für  $0 < s < 1$  schließlich ist die Hesse–Matrix an allen Stellen  $x \neq 0$  indefinit; denn wählt man  $u \neq 0$  orthogonal zu  $x$ , also mit  $x \cdot u = 0$ , so ist  $u \cdot \left( \frac{\partial^2 |x|^s}{\partial x^2} \right) u = s|x|^{s-2}|u|^2 > 0$ , und für  $u = x$  ist andererseits  $u \cdot \left( \frac{\partial^2 |x|^s}{\partial x^2} \right) u = s(s-1)|x|^s < 0$ . Dasselbe Resultat, nur mit umgekehrten Vorzeichen, ergibt sich für  $s < 0$ . Im Sonderfall  $s = 0$  ist  $|x|^s$  natürlich konstant gleich 1 auf  $\mathbb{R}^n$  (nach stetiger Ergänzung auch im Nullpunkt) und damit konvex und konkav.

- Die Potenz  $|x|^s$  der Euklidischen Normfunktion ist streng konvex auf  $\mathbb{R}^n$  für  $s > 1$ ,
- konvex, aber nicht streng konvex, für  $s = 1$  und
- auf keiner offenen, konvexen Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  konvex oder konkav für  $0 \neq s < 1$ .

(4) Wir untersuchen eine *Cobb–Douglas–Funktion*

$$f(x) = c x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n} \quad (c, s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{R}_{>0})$$

bzgl. Konvexität / Konkavität auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ . Notwendig für Konvexität bzw. Konkavität ist, dass  $f(x)$  als Funktion von jeder einzelnen Variablen  $x_j$  konvex bzw. konkav ist. Da es sich hierbei um ein Vielfaches der Potenzfunktion  $x_j^{s_j}$  handelt, ist also Konvexität nur möglich, wenn alle Exponenten  $s_j \geq 1$  sind und Konkavität nur, wenn  $0 < s_j \leq 1$  ist für alle  $j$ . Eine stärkere Einschränkung erhalten wir noch aus der Betrachtung der

Funktion auf Ursprungsstrahlen  $\mathbb{R}_{>0}u$ . Da  $f(tu) = t^s f(u)$  ist mit der Exponentensumme  $s = s_1 + \dots + s_n$ , muss sogar die Exponentensumme  $s \leq 1$  sein, wenn  $f$  konkav ist, weil  $\mathbb{R}_{>0} \ni t \mapsto t^s$  nur für  $0 < s \leq 1$  konkav ist. Betrachten wir  $f$  auf einer Strecke von einem Randpunkt  $x$  von  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  etwa mit  $x_i = 0$  zu einem anderen Randpunkt  $\tilde{x}$  mit  $\tilde{x}_j = 0$ , derart dass  $x$  und  $\tilde{x}$  keine gemeinsamen Nullkomponenten haben, so hat die Funktion  $f((1-t)x + t\tilde{x})$  positive Werte für  $0 < t < 1$  und Randwerte 0 für  $t = 0$  oder  $t = 1$ , also ist dies gewiss keine konvexe Funktion von  $t \in [0, 1]$ . Somit ist eine Cobb–Douglas–Funktion für keine Wahl der Exponenten  $s_j$  konvex auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  (mit  $n \geq 2$ ).

Um  $f$  auf Konkavität im Fall  $0 < s \leq 1$  zu prüfen, berechnen wir die Hesse–Matrix an Stelle  $x \in \mathbb{R}_{>0}^n$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{s_j}{x_j} f(x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{s_i s_j}{x_i x_j} f(x) \quad \text{für } i \neq j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = \frac{s_j^2}{x_j^2} f(x) - \frac{s_j}{x_j} f(x).$$

Für  $u \in \mathbb{R}^n$  folgt:

$$\begin{aligned} u \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) \right) u &= f(x) \sum_{i,j=1}^n \frac{u_i u_j s_i s_j}{x_i x_j} - f(x) \sum_{j=1}^n \frac{s_j u_j^2}{x_j^2} \\ &= f(x) \left[ \left( \sum_{j=1}^n \frac{s_j u_j}{x_j} \right)^2 - \sum_{j=1}^n \frac{s_j u_j^2}{x_j^2} \right] = f(x) [(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v})^2 - |\mathbf{v}|^2], \end{aligned}$$

wobei wir  $\mathbf{s} = (\sqrt{s_1}, \dots, \sqrt{s_n})$  und  $\mathbf{v} = (\sqrt{s_1} \frac{u_1}{x_1}, \dots, \sqrt{s_n} \frac{u_n}{x_n})$  gesetzt haben. Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung garantiert nun  $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{s}|^2 |\mathbf{v}|^2$  mit  $|\mathbf{s}|^2 = s_1 + \dots + s_n = s$ , und weil  $\mathbf{v} \neq 0$  ist für  $u \neq 0$  folgt  $u \cdot (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)) u < 0$  für alle  $u \neq 0$  im Fall  $0 < s < 1$ , d.h. die Hesse–Matrix ist dann negativ definit überall auf  $\mathbb{R}_{>0}^n$  und die Cobb–Douglas–Funktion dort somit streng konkav. Im Fall  $s = 1$  erhalten wir immer noch negative Semidefinitheit, jedoch  $u \cdot (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)) u = 0$ , genau wenn  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{v}$  linear abhängig sind, was genau bei linearer Abhängigkeit von  $u$  und  $x$  eintritt. In diesem Fall  $s = 1$  ist die Funktion  $f(tx) = tf(x)$  ja auch linear auf jedem Ursprungsstrahl. Im Fall  $s > 1$  ist die Hesse–Matrix an allen Stellen  $x \in \mathbb{R}_{>0}^n$  indefinit; denn bei der Wahl  $u = x$  ist  $u \cdot (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)) u = f(x)[s^2 - s] > 0$ , bei der Wahl  $0 \neq u \perp (\frac{s_1}{x_1}, \dots, \frac{s_n}{x_n})$  dagegen ist  $u \cdot (\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)) u = -f(x)|\mathbf{v}|^2 < 0$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  überträgt sich die (strenge) Konkavität von  $\mathbb{R}_{>0}^n$  auf den Abschluss  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , und wir können als Ergebnis der Diskussion festhalten:

- Eine Cobb–Douglas–Funktion ist streng konkav auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , genau wenn die Exponentensumme  $s = s_1 + \dots + s_n < 1$  ist;
- im Fall  $s = 1$  ist die Cobb–Douglas–Funktion noch konkav auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ , jedoch nicht streng konkav;
- im Fall  $s > 1$  ist die Cobb–Douglas–Funktion auf keiner offenen, konvexen Menge in  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$  konkav oder konvex. ■

Die Untersuchung konvexer Funktionen  $f$  auf innere Extremstellen ist besonders einfach: Jeder kritische Punkt  $x_0$  ist automatisch absolute Minimumstelle von  $f$  auf dem konvexen Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Das folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass eine konvexe Funktion oberhalb ihrer Linearisierungen liegt, also aus der Ungleichung  $f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0) \cdot \nabla f(x_0)$  zusammen mit  $\nabla f(x_0) = 0$ . (Die Ungleichung  $f(x) \geq f(x_0)$  gilt

auch noch, wenn  $x$  oder  $x_0$  ein Randpunkt von  $D$  ist; denn aus der Konvexitätsungleichung  $f((1-t)x_0 + tx) - f(x_0) \leq t(f(x) - f(x_0))$  folgt durch Differentiation bei  $t = 0$ , wenn  $x_0$  kritischer Punkt ist,  $0 = (x - x_0) \cdot \nabla f(x_0) \leq f(x) - f(x_0)$ . Aus der Konvexitätsungleichung  $f((1-t)x + t\tilde{x}) \leq (1-t)f(x) + tf(\tilde{x}) \leq (1-t)y + ty = y$  für  $f(x) \leq y$  und  $f(\tilde{x}) \leq y$  folgt außerdem, dass jede Subniveaumenge  $\{x \in D : f(x) \leq y\}$  eine konvexe Teilmenge von  $D$  ist. Das gilt insbesondere für die Menge aller Minimumstellen von  $f$  auf  $D$  (wenn nichtleer). Für  $y = \min_D f$  muss dabei immer Gleichheit eintreten, weil ja kein Funktionswert kleiner als  $y$  sein kann. Im Falle strenger Konvexität ist Gleichheit mit  $0 < t < 1$  aber nur möglich, wenn  $x = \tilde{x}$  ist, also kann es dann nur eine einzige Minimumstelle geben. Wir halten diese Überlegungen noch fest als

**SATZ (über Extremstellen konvexer Funktionen):** *Ist  $D$  eine konvexe Menge in  $\mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe [bzw. konkave] Funktion, so ist jeder kritische Punkt von  $f$  in  $D$  absolute Minimumstelle [bzw. absolute Maximumstelle] von  $f$  auf  $D$ . Die Menge aller Minimumstellen [bzw. Maximumstellen] ist eine evtl. leere konvexe Teilmenge von  $D$  und besteht im Falle strenger Konvexität von  $f$  [bzw. strenger Konkavität] aus höchstens einem Punkt. Ist  $f$  nicht konstant, so kann  $f$  ein Maximum [bzw. ein Minimum] auf  $D$  höchstens in einem Randpunkt annehmen.*

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Diskussion der Taylor-Formel für Funktionen von mehreren Veränderlichen, welche die lineare Approximation von einmal differenzierbaren Funktionen durch ihr Differential verallgemeinert zu einer besseren polynomialen Approximation bei von höherer Ordnung differenzierbaren Funktionen.

**DISKUSSION (Taylor-Formel bei Funktionen von mehreren Veränderlichen):**

1) Die Idee ist hier — wie bei Funktionen von einer Veränderlichen in 4.6 —, dass man eine Funktion  $f(x)$  von mehreren Veränderlichen nahe einer festen Stelle  $a \in \mathbb{R}^n$  durch eine Polynomfunktion  $p(x)$  vom Grad  $\leq l$  möglichst gut approximativ darstellen will, und zwar mit umso besserer Approximationsgüte, je größer der erlaubte Grad  $l$  ist. Eine gute Approximation kann dadurch beschrieben werden, dass die Ableitungen von  $f$  und  $p$  an der Stelle  $a$  bis zur Ordnung  $l$  übereinstimmen, was anschaulich bedeutet, dass sich der Graph der Polynomfunktion dem Graphen der Funktion  $f$  bei der Stelle  $(a, f(a))$  entsprechend gut anschmiegt. Dazu stellen wir zunächst fest, wenn  $f$  an der Stelle  $a$  partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $l$  besitzt:

- *Es gibt genau eine Polynomfunktion  $p$  vom Grad  $\leq l$ , deren partielle Ableitungen an der Stelle  $a$  mit denen von  $f$  bis zur Ordnung  $l$  übereinstimmen.*

Um das einzusehen, setzen wir an  $p(x) = \sum_{|\alpha| \leq l} c_\alpha (x - a)^\alpha$  (Multiindexschreibweise, also  $(x - a)^\alpha = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x_n - a_n)^{\alpha_n}$  und  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  für  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ). Die Ableitungen der Monome  $(x - a)^\alpha$  haben wir bereits früher berechnet. Insbesondere gilt:

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} (x - a)^\alpha = \begin{cases} \alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n! & \text{für } \beta = \alpha \\ 0 & \text{an der Stelle } x = a \text{ für } \beta \neq \alpha, \end{cases}$$

letzteres weil die Ableitung den Faktor  $(x_j - a_j)^{\alpha_j - \beta_j}$  enthält, wenn  $\beta_j < \alpha_j$  ist, bzw. weil die Ableitung überall Null ist, wenn  $\beta_j > \alpha_j$ . Man sieht nun, dass  $\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} p(a) = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} f(a)$  für alle partiellen Ableitungen mit Ordnung  $|\beta| \leq l$  genau dann eintritt, wenn  $\alpha! c_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(a)$  gilt für  $|\alpha| \leq l$ . Damit ist die Behauptung bewiesen und zugleich ein Formel für das gesuchte Polynom gefunden:



2) Das  $l$ -te Taylorpolynom von  $f$  zur Stelle  $a$  ist

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{|\alpha| \leq l} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) (x-a)^\alpha \\ &= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq l} \frac{1}{\alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!} \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(a) (x_1 - a_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x_n - a_n)^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Dies ist also das eindeutige Polynom vom Grad  $\leq l$ , das an der Stelle  $a$  dieselben partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $l$  hat wie die Funktion  $f$ . Das nullte Taylor-Polynom ist einfach die Konstante  $f(a)$  (für  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  ist der Summand im Taylor-Polynom als  $f(a)$  zu interpretieren), das erste ist die beste affin lineare Approximation zu  $f$  bei  $a$ ,

$$f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) = f(a) + (x - a) \cdot \nabla f(a)$$

und das zweite sieht so aus:

$$\begin{aligned} & f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)(x_1 - a_1)^2 + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a)(x_n - a_n)^2 \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)(x_1 - a_1)(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n}(a)(x_{n-1} - a_{n-1})(x_n - a_n) \\ & = f(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ & = f(a) + (x - a) \cdot \nabla f(a) + \frac{1}{2} (x - a) \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \right) (x - a). \end{aligned}$$

Die Formeln, welche den Gradienten bzw. die Hesse-Matrix enthalten, gelten dabei für skalare Funktionen  $f$ , die anderen auch für Vektorfunktionen  $f = (f_1, \dots, f_m)$  (wobei das Taylor-Polynom wie die partiellen Ableitungen komponentenweise gebildet wird). Das Bildungsgesetz für die Taylor-Polynome sollte nun klar sein. Mit dem totalen Differential  $l$ -ter Ordnung  $d_a^l f(w_1, \dots, w_l) = \partial_{w_1} \dots \partial_{w_l} f(a)$  kann man das  $l$ -te Taylor-Polynom auch so schreiben:

$$f(a) + d_a f(x-a) + \frac{1}{2!} d_a^2 f(x-a, x-a) + \dots + \frac{1}{l!} d_a^l f(x-a, \dots, x-a),$$

wobei im  $k$ -ten Summanden  $k$ -mal der Vektor  $x - a$  in das mit  $\frac{1}{k!}$  multiplizierte Differential  $k$ -ter Ordnung von  $f$  an der Stelle  $a$  einzusetzen ist, also die Richtungsableitung  $k$ -mal in Richtung des Vektors  $x - a$  gebildet wird,

$$d_a^k f(x-a, \dots, x-a) = (\partial_{x-a}^k f)(a) = \left. \frac{d^k}{dt^k} \right|_{t=0} f(a + t(x-a)).$$

Unterstellt ist dabei, dass  $f$  bei  $a$  stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $l$  hat.

3) Nützlich wird das alles erst, wenn man den Fehler  $f(x) - p(x)$  bei Ersetzen von  $f$  durch sein  $l$ -tes Taylor-Polynom zur Stelle  $a$  gut abschätzen kann. Der Fehler sollte "von  $l$ -ter Ordnung klein" sein für  $x$  nahe  $a$ . Um das quantitativ zu beschreiben, kann man wie in 4.6 vorgehen. Hier argumentieren wir etwas anders und betrachten wir für einen festen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  die Funktion  $\varphi(t) = f(a + tv) - p(a + tv)$  von einer reellen

Variablen  $t$ . Bei  $t = 0$  verschwinden dann alle Ableitungen von  $\varphi$  bis zur Ordnung  $l$ , so dass mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wiederholter partieller Integration folgt, wenn  $f$  auf der Strecke von  $a$  nach  $x = a + v$   $(l+1)$ -mal differenzierbar ist:

$$\varphi(1) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt = \int_0^1 \varphi''(t) dt = \dots = \int_0^1 \varphi^{(l+1)}(t) \frac{(1-t)^l}{l!} dt.$$

(Die Randterme  $\varphi^{(k)} \frac{(1-t)^k}{k!} \Big|_{t=0}^{t=1}$  verschwinden für  $k = 1 \dots l$ .) Weil  $p$  Grad  $\leq l$  hat, ist hier  $\varphi^{(l+1)}(t) = \partial_v^{l+1} f(a + tv)$  und wegen  $\varphi(1) = f(a+v) - p(a+v)$  folgt die **Taylor-Formel**:

$$f(a+v) - p(a+v) = \int_0^1 \frac{(1-t)^l}{l!} \partial_v^{l+1} f(a+tv) dt$$

bzw.  $f(x) - p(x) = \int_0^1 \frac{(1-t)^l}{l!} \frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}} f(a+t(x-a)) dt.$

4) Diese Formel ist nun hervorragend geeignet zur Abschätzung des Fehlers  $f(x) - p(x)$ , der auch das **Restglied** der Taylor-Entwicklung  $l$ -ter Ordnung zum Entwicklungspunkt  $a$  genannt wird. Ist nämlich  $C$  eine Konstante mit  $|d_x^{l+1} f(u, \dots, u)| = |\partial_u^{l+1} f(x)| \leq C$  für alle Einheitsvektoren  $u$  und alle Punkte  $x$  aus einer Kugel  $B_r(a)$  (eine solche endliche Konstante gibt es, wenn die partiellen Ableitungen  $(l+1)$ -ter Ordnung stetig sind auf der abgeschlossenen Kugel  $B_r(a)$ ), so gilt  $|\partial_v^{l+1} f(a+tv)| = |v|^{l+1} |\partial_{v/|v|}^{l+1} f(a+tv)| \leq C|v|^{l+1}$  und daher

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{C}{(l+1)!} |x-a|^{l+1} \quad \text{für } |x-a| \leq r,$$

weil  $\int_0^1 \frac{1}{l!} (1-t)^l dt = \frac{1}{(l+1)!}$  ist. Der Fehler geht also bei  $x \rightarrow a$  schneller gegen Null als die Potenz  $|x-a|^l$ . Man sagt:

- Das  $l$ -te Taylor-Polynom von  $f$  zur Stelle  $a$  approximiert die Funktion  $f$  bei  $a$  von  $l$ -ter Ordnung.

5) Wir geben zwei *Anwendungen der Taylor-Formel*: Für  $l = 1$  bedeutet Approximation von erster Ordnung, dass der Linearisierungsfehler  $f(x) - f(a) - (x-a) \cdot \nabla f(a)$  schneller gegen Null geht als  $|x-a|$ , also die charakteristische Eigenschaft des Differentials (siehe 5.3). Aber jetzt haben wir auch eine genaue **Abschätzung des Linearisierungsfehlers**:

$$|f(x) - f(a) - (x-a) \cdot \nabla f(a)| \leq \frac{C}{2} |x-a|^2 \quad \text{für } |x-a| \leq r,$$

wobei man als Konstante  $C$  das Supremum der Euklidischen Norm der Hesse-Matrix von  $f$  (oder auch des größten Eigenwertbetrags dieser Matrix) auf der Strecke von  $a$  nach  $x$  nehmen kann. Für  $l = 3$  gilt analog

$$\left| f(x) - f(a) - (x-a) \cdot \nabla f(a) - \frac{1}{2} (x-a) \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \right) (x-a) \right| \leq \frac{C}{3!} |x-a|^3 \quad \text{für } |x-a| \leq r,$$

wenn  $C$  eine obere Schranke für alle Richtungsableitungen dritter Ordnung  $|\partial_u^3 f(x)|$  mit  $|u| = 1$  an Stellen  $x \in B_r(a)$  ist. Ist  $\nabla f(a) = 0$  und die Hesse-Matrix  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \right)$  positiv definit mit kleinstem Eigenwert  $\lambda > 0$ , so folgt  $f(x) - f(a) \geq \frac{1}{2} \lambda |x-a|^2 - \frac{1}{6} C |x-a|^3 = \frac{1}{2} |x-a|^2 (\lambda - \frac{1}{3} C |x-a|) > 0$  für  $0 < |x-a| < 3\lambda/C$ . Damit erhält man nun eine untere **Abschätzung für den Radius strikter Minimalität** der lokalen isolierten Minimumstelle  $a$ :

$$f(x) > f(a) \quad \text{für } 0 < |x-a| < \min \left( r, \frac{3\lambda}{C} \right)$$

wenn  $\partial_u^2 f(a) \geq \lambda > 0$  und  $|\partial_u^3 f(x)| \leq C$  für  $|x-a| < r$ ,  $|u| = 1$ . ■

## 5.7 Auflösung von Gleichungen, implizite Funktionen

In diesem letzte Abschnitt geht es um allgemeine Systeme von  $m$  durch differenzierbare (im Allgemeinen nichtlineare) Funktionen gegebene Gleichungen für  $n$  reelle Unbekannte

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = y_m \end{array} \right\} \text{ kurz } F(x) = y.$$

Dafür gibt es keine so geschlossene und vollständige Theorie, wie sie die Lineare Algebra für lineare Gleichungssysteme zur Verfügung stellt. Jedoch lassen sich mit der Idee der linearen Approximation gewisse Ergebnisse auf nichtlineare Gleichungssysteme übertragen — allerdings mit einer wesentlichen Einschränkung: Da eine gute Approximation differenzierbarer Funktionen durch lineare Abbildungen im Allgemeinen nur *lokal*, d.h. in der Nähe eines ins Auge gefassten festen Punktes, möglich ist, erhält man auch nur *lokale Aussagen* über die Lösungen der nichtlinearen Gleichungssysteme, d.h. Aussagen über ihre Lösungen in der Nähe einer vorgegebenen fixierten Lösung.

Wir betrachten zuerst den Fall eindeutiger Auflösbarkeit. Hat  $F(x) = y$  für jedes  $y$  aus einer offenen Menge  $V$  in  $\mathbb{R}^m$  genau eine Lösung  $x$  in  $U \subset \mathbb{R}^n$ , so ist die Umkehrfunktion  $F^{-1}: V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  erklärt, indem man  $F^{-1}(y) = x$  setzt für  $y \in V$ . Nehmen wir an, dass  $F$  differenzierbar ist und dass auch die Lösung  $F^{-1}(y)$  differenzierbar von der rechten Seite des Gleichungssystems abhängt, so erhalten wir durch Differentiation von  $F^{-1}(F(x)) = x$  und  $F(F^{-1}(y)) = y$  mit der Kettenregel die Beziehungen  $\left(\frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(y)\right) \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x)\right) = \mathbb{I}_n$  und  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x)\right) \left(\frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(y)\right) = \mathbb{I}_m$  für  $y = F(x)$ , d.h. die Ableitungsmatrix von  $F^{-1}$  an der Stelle  $y = F(x)$  ist die Inverse der Ableitungsmatrix von  $F$  an der Stelle  $x$ . Das ist natürlich nur möglich, wenn beide Matrizen quadratisches Format haben, d.h. wenn die Anzahl  $m$  der Gleichungen mit der Anzahl  $n$  der Unbekannten übereinstimmt — und nur in diesem Fall können wir vernünftigerweise erwarten, dass das Gleichungssystem eindeutige Lösungen hat. Der folgende Satz besagt, dass diese Erwartung zumindest lokal in der Nähe einer Stelle mit invertierbarer Ableitungsmatrix berechtigt ist.

**SATZ (Umkehrsatz):** Die Funktion  $F: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^m$  habe stetige partielle Ableitungen auf der offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  und die Ableitungsmatrix von  $F$  an der Stelle  $x_0 \in D$  sei invertierbar. Dann gibt es offene Mengen  $U, V$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $x_0 \in U \subset D$  und  $y_0 = f(x_0) \in V$ , derart dass  $F(U) = V$  ist und dass  $F(x) = y$  für alle  $y \in V$  genau eine Lösung  $x$  in  $U$  besitzt. Die somit durch  $F^{-1}(y) = x$  definierte Umkehrabbildung  $F^{-1}: V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  hat dann stetige partielle Ableitungen bis zu derselben Ordnung wie  $F$  auf  $D$  und es gilt die **Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion**:

$$\left(\frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(y)\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x)\right)^{-1} \quad \text{für alle } x \in U \text{ und } y = F(x) \in V.$$

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Idee, dass die lineare Approximation  $L(x) = F(x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\right)(x - x_0)$  zu  $F(x)$  bei  $x_0$  nach Voraussetzung eine Umkehrabbildung  $L^{-1}(y) = x_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)\right)^{-1}(y - y_0)$  auf  $\mathbb{R}^n$  hat. Da  $L(x)$  eine gute Approximation zu  $F(x)$  für  $x$  nahe  $x_0$  ist, kann man sich denken, dass sich durch kleine Modifikationen der linearen Umkehrabbildung  $L^{-1}$  bei  $y_0$  eine nahe  $y_0$  definierte differenzierbare Umkehrabbildung zu  $F$  herstellen lässt. Die exakte mathematische Durchführung ist aber recht anspruchsvoll und würde hier zu weit führen. Dass die Ableitungsmatrix von  $F^{-1}$  an der Stelle  $y = F(x)$  dann die Inverse der Ableitungsmatrix von  $F$  an der Stelle  $x$  sein muss, haben wir vor dem Satz schon überlegt.

**DISKUSSION: 1)** Der Umkehrsatz bedeutet, dass man ausgehend von einer Lösung  $f(x_0) = y_0$  mit invertierbarer Ableitungsmatrix von  $F$  in  $x_0$  bei Variationen der rechten Seite der Lösung ein Stück weit eindeutig und in differenzierbarer Abhängigkeit von der rechten Seite folgen kann. Verändert man  $y_0$  zu  $y \in \mathbb{R}^n$  nahe  $y_0$  (so nahe, dass  $y$  noch in der offenen Menge  $V$  um  $y_0$  liegt), so gehört dazu eine eindeutige Lösung  $x$  nahe  $x_0$  (nahe in dem Sinne, dass  $x$  in der offenen Umgebung  $U$  zu  $x_0$  liegt). Die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion gibt auch eine **lineare Näherung für die eindeutige Lösung**  $x = F^{-1}(y)$ , nämlich

$$x \approx x_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\right)^{-1}(y - y_0),$$

weil hier rechts ja die Linearisierung  $F^{-1}(y_0) + \left(\frac{\partial F^{-1}}{\partial y}(y_0)\right)(y - y_0)$  der differenzierbaren Umkehrfunktion um die Stelle  $y_0$  steht. Der Fehler bei dieser Näherung ist klein im Verhältnis zur Größe von  $|y - y_0|$ , d.h. er strebt auch nach Division durch  $|y - y_0|$  noch gegen Null bei  $y \rightarrow y_0$ .

**2)** Da die Kettenregel auch für die Elastizitäten-Matrizen gilt, wenn die Variablen  $x$  und die Komponenten von  $y = F(x)$  alle positiv sind, haben wir analog:

- Die Elastizitäten-Matrix der differenzierbaren Umkehrfunktion  $F^{-1}$  an der Stelle  $y = F(x)$  ist die Inverse der Elastizitäten-Matrix von  $F$  an der Stelle  $x$ .

Schreibt man  $y_i = f_i(x)$  für die Komponentenfunktionen von  $F = (f_1, \dots, f_n)$  und  $x_j = g_j(y)$  für die Komponenten der Umkehrfunktion  $F^{-1} = (g_1, \dots, g_n)$ , so lässt sich das in Formeln so ausdrücken:

$$\left(\varepsilon_{x_j, y_i}(y)\right) = \left(\varepsilon_{y_i, x_j}(x)\right)^{-1} \quad \text{für } y = F(x).$$

**3)** Der Umkehrsatz macht nur eine *lokale Aussage*, er sagt (leider) überhaupt nichts aus über die Größe der möglicherweise winzig kleinen offenen Umgebungen  $U$  zu  $x_0$  und  $V$  zu  $y_0$ , derart dass  $F: U \rightarrow V$  eine differenzierbare Umkehrabbildung  $F^{-1}: V \rightarrow U$  hat. Die Ausführung des Beweises zeigt immerhin, dass man z.B.  $U$  als offene Kugel  $U_r(x_0)$  um  $x_0$  mit einem Radius  $r \approx \frac{1}{2BC}$  wählen kann und dass  $V$  dann eine offene Kugel  $U_s(y_0)$  mit Radius  $s \approx \frac{1}{2Br}$  umfasst, wenn  $C$  eine obere Schranke für die Normen der zweiten Ableitungen von  $F$  ist und  $B$  eine Schranke für die Beträge der Einträge in der inversen Ableitungsmatrix  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0)\right)^{-1}$ . Man kann übrigens eine beliebige der Umgebungen  $U, V$  als offene Kugel wählen, wenn man möchte, aber nicht  $U$  und  $V$  simultan, wenn  $F$  nicht zufällig Kugeln auf Kugeln abbildet; denn  $V = F(U)$  ist ja das Bild von  $U$  unter  $F$  und  $U = F^{-1}(V)$  das Bild von  $V$  unter  $F^{-1}$ .

4) Bezüglich der Existenz einer *globalen differenzierbaren Umkehrfunktion* kann man folgendes sagen:

- Ist  $F: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektiv und stetig differenzierbar auf der offenen Menge  $D$  mit überall invertierbarer Ableitungsmatrix, so ist  $f(D)$  offen und es existiert eine globale stetig differenzierbare Umkehrabbildung  $F^{-1}: \mathbb{R}^n \supset F(D) \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$ .

Die Injektivität von  $F$  besagt, dass verschiedene Punkte  $x \neq \tilde{x}$  in  $D$  auch verschiedene Werte  $F(x) \neq F(\tilde{x})$  in  $F(D)$  haben. Daher existiert die Umkehrabbildung  $F^{-1}: F(D) \rightarrow D$ , die jedem  $y \in F(D)$  die eindeutige Lösung  $x \in D$  zu  $F(x) = y$  zuordnet. Andererseits gibt uns der Umkehrsatz auf einer Umgebung  $V = F(U)$  eines beliebigen Punktes  $y_0 = f(x_0)$  mit  $x_0 \in D$  eine lokale differenzierbare Umkehrfunktion mit Werten in  $U \subset D$ , und diese muss auf  $V$  mit der globalen Umkehrabbildung  $F^{-1}$  übereinstimmen (wegen der Eindeutigkeit der Lösungen  $x \in D$ ). Daher ist  $y_0$  innerer Punkt von  $f(D)$  und  $F^{-1}$  nahe  $y_0$  stetig differenzierbar.

In der Mathematik werden verschiedene hinreichende Kriterien für die Existenz einer globalen differenzierbaren Umkehrabbildung bewiesen. Eines, das auch für die Wirtschaftsmathematik von Interesse ist, garantiert die Existenz einer globalen Umkehrabbildung zu  $F: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wenn  $D$  offen und konvex ist und  $F$  eine sog. **kleine Störung der Identität**, d.h. es gibt  $0 \leq c < 1$  mit

$$\left| u - \left( \frac{\partial F}{\partial x}(x) \right) u \right| \leq c < 1 \quad \text{für alle Einheitsvektoren } u \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } x \in D.$$

Das ist z.B. erfüllt, wenn sich die Ableitungsmatrix von  $F$  an jeder Stelle  $x \in D$  nur durch eine Matrix der Euklidischen Norm  $\leq c < 1$  von der  $n \times n$ -Einheitsmatrix unterscheidet. ■

**BEISPIELE:** (1)  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \left( x^4 - e^y, 2y^3 + \ln \frac{1+x^2}{2} \right)$

Die Ableitungsmatrix hat Determinante

$$\det \begin{pmatrix} 4x^3 & -e^y \\ \frac{2x}{1+x^2} & 6y^2 \end{pmatrix} = 24x^3y^2 + \frac{2x}{1+x^2}e^y = 2x \left( 12x^2y^2 + \frac{e^y}{1+x^2} \right).$$

Diese Determinante ist Null, genau wenn  $x = 0$  ist. Nach dem Umkehrsatz ist also  $F$  lokal bei allen Stellen  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  mit  $x \neq 0$  differenzierbar umkehrbar (und die Umkehrfunktion kann beliebig oft differenziert werden). Eine Lösung zu

$$\begin{aligned} x^4 - e^y &= 0 \\ \ln \frac{1+x^2}{2} + 2y^3 &= 0 \end{aligned}$$

ist z.B.  $x = 1, y = 0$ . Der Umkehrsatz garantiert dann, dass es auch zu

$$\begin{aligned} x^4 - e^y &= a \\ \ln \frac{1+x^2}{2} + 2y^3 &= b \end{aligned}$$

für alle rechten Seiten  $a, b$  von hinreichend kleinem Betrag genau eine Lösung  $(x, y)$  nahe  $(1, 0)$  gibt, die zudem differenzierbar von  $(a, b)$  abhängt. Eine Näherung für diese Lösung ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left( \frac{\partial F}{\partial(x, y)}(1, 0) \right)^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+1 \\ 4b-a \end{pmatrix}.$$

Es ist aber im vorliegenden Fall (wohl) nicht möglich, die Lösung durch explizite Auflösung des Gleichungssystems als elementare Funktion der Variablen  $a, b$  darzustellen.

Der Umkehrsatz sagt übrigens nicht, dass  $F(x, y) = (a, b)$  für kleine Werte von  $|a|$  und  $|b|$  genau eine Lösung in  $\mathbb{R}^2$  hat, sondern eben nur, dass es genau eine Lösung  $(x, y)$  nahe der Stelle  $(1, 0)$  gibt. Tatsächlich ist ja hier  $(-x, y)$  eine zweite Lösung, die aber nahe bei  $(-1, 0)$  liegt und nicht nahe bei  $(1, 0)$ . An der Stelle  $(0, 0)$  ist die Ableitungsmatrix von  $F$  nicht invertierbar, der Umkehrsatz ist dort also nicht anwendbar. Wegen  $F(-x, y) = F(x, y)$  kann hier auch auf keiner Umgebung von  $(0, 0)$  eine Umkehrfunktion existieren. (Allgemein kann man aus der Nichtinvertierbarkeit der Ableitungsmatrix an einer Stelle aber nur schließen, dass es dort lokal keine *differenzierbare* Umkehrabbildung geben kann. Eine nichtdifferenzierbare Umkehrabbildung ist durchaus möglich, wie das Beispiel  $F(x, y) = (x^3, y^3)$  mit Ableitungsmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  im Nullpunkt und globaler Umkehrfunktion  $F^{-1}(a, b) = ((\text{sign } a)\sqrt[3]{|a|}, (\text{sign } b)\sqrt[3]{|b|})$  auf  $\mathbb{R}^2$  zeigt.)

Global auf ganz  $\mathbb{R}^2$  ist  $F$  sicher nicht umkehrbar; denn es gilt  $F(-x, y) = F(x, y)$ , also hat  $F$  an den verschiedenen Stellen  $(x, y)$  und  $(-x, y)$  mit  $x > 0$  denselben Wert und ist nicht injektiv auf  $\mathbb{R}^2$ . Man kann aber sehen, dass  $F$  auf der oberen Halbebene  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$  injektiv ist; denn aus  $x^4 - e^y = a$ ,  $2y^3 + \ln \frac{1+x^2}{2} = b$  folgt  $y = \ln(x^4 - a)$ ,  $2(\ln(x^4 - a))^3 + \ln \frac{1+x^2}{2} = b$ , und da links in der letzten Gleichung eine streng wachsende Funktion von  $x^2$  (mit  $x^4 > a$ ) steht, kann es höchstens eine Lösung  $x > 0$  geben, die dann auch  $y$  eindeutig bestimmt. Da die Ableitungsmatrix überall auf  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$  invertierbar ist, gibt es somit eine globale differenzierbare Umkehrabbildung  $F^{-1}: F(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$  zu  $F$  auf der oberen Halbebene.

(2) Auf einem *kontingentierten Markt* werden die produzierten Mengen  $x_1, \dots, x_n$  von  $n$  Gütern durch Quoten festgelegt und die Marktpreise durch Preisfunktionen  $p_1(x_1, \dots, x_n), \dots, p_n(x_1, \dots, x_n)$  bestimmt. Sind diese Preisfunktionen bekannt, so kann man die Auswirkungen einer Quotenänderung von  $x = (x_1, \dots, x_n)$  zu  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  mit Hilfe der Preisfunktionen exakt berechnen und näherungsweise durch die Zuwachsformel

$$p(\tilde{x}) = p(x) + \left( \frac{\partial p}{\partial x}(x) \right) (\tilde{x} - x), \quad p_i(\tilde{x}) = p_i(x) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial x_j}(x) (\tilde{x}_j - x_j)$$

beschreiben, wenn die Änderungen  $|\tilde{x}_j - x_j|$  klein sind. Stellt sich dagegen die Frage, wie die Quotenänderung vorzunehmen ist, um eine gewünschte Änderung der Marktpreise von  $p = (p_1, \dots, p_n)$  zu  $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$  zu erreichen, so ist das System der  $n$  Gleichungen

$$p_i(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \tilde{p}_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

nach den Unbekannten  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  aufzulösen. Es ist ökonomisch keineswegs klar, dass dies möglich ist, dass man also durch entsprechende Quotenpolitik *beliebige* Marktpreise in einem gewissen Regime erreichen kann. Ist aber die Ableitungsmatrix  $\left( \frac{\partial p}{\partial x}(x) \right)$  invertierbar, so garantiert der Umkehrsatz, dass zumindest für Preisvektoren  $\tilde{p}$  nahe  $p$  genau ein Quotenvektor  $\tilde{x}$  nahe  $x$  existiert, und näherungsweise erhält man  $\tilde{x}$  durch

$$\tilde{x} \approx x + \left( \frac{\partial p}{\partial x}(x) \right)^{-1} (\tilde{p} - p).$$

Man beachte, dass man, um beispielsweise  $p_i$  zu senken bei Konstanthalten aller anderen Preise  $p_h$ ,  $h \neq i$ , nicht einfach nur die Quote  $x_i$  erhöhen kann, sondern im allgemeinen alle Quoten  $x_j$  verändern muss (außer wenn die Preise der anderen Produkte nicht von den Angebotsmengen des  $i$ -ten Produkts abhängen). ■

Wir wenden uns nun folgender für ökonomische Anwendungen wichtigen Frage zu:

*Wie muss man bei einer reellen Funktion  $f(x, y)$  von zwei Variablen den Wert von  $y$  korrigieren, um auf eine Änderung von  $x$  so zu reagieren, dass der Funktionswert insgesamt nicht geändert wird?*

(Die Funktion kann auch noch von weiteren Variablen abhängen, die man sich bei dieser Fragestellung aber fixiert denkt.) Die ökonomische Relevanz der Problemstellung ist klar. Man denke etwa an eine Produktionsfunktion, bei der ein Inputfaktor nicht unmittelbar beeinflussbaren Änderungen unterliegt, während ein anderer Produktionsfaktor zur Kompensation verändert werden kann, um das Produktionsniveau aufrecht zu erhalten. Zur Beantwortung der Frage müssen wir eigentlich, wenn etwa  $(x_*, y_*)$  die ursprünglichen Werte der Variablen sind und  $z = f(x_*, y_*)$  der Funktionswert, der sich nicht ändern soll, für den geänderten Wert  $x$  den zu bestimmenden Wert  $y$  aus der Gleichung  $f(x, y) = z$  berechnen. Unterstellt, es gibt zu jedem Wert von  $x$  (in einem gewissen Bereich um  $x_*$ ) genau eine Lösung  $y$ , so erhalten wir eine Funktion  $y = g(x)$ , indem wir jedem  $x$  diese Lösung zuordnen. Man sagt, dass  $g$  die durch die Gleichung

$$f(x, g(x)) = z \quad \text{bzw.} \quad y = g(x) \iff f(x, y) = z.$$

**implizit definierte Funktion** ist. Kann man die Gleichung durch Anwendung von Rechenoperationen und elementaren Grundfunktionen nach  $y$  auflösen, so erhält man eine **explizite Funktionsdarstellung** für  $g(x)$  als elementare Funktion von  $x$ . Dann liefert diese Formel für jede Änderung  $x - x_*$  der ersten Variablen sofort die zugehörige Korrektur  $y - y_* = g(x) - y_*$  der zweiten Variablen, die nötig ist, um das Funktionsniveau  $z$  zu erhalten. Bei nichtlinearen Gleichungen ist die explizite Auflösung nach einer Variablen oft nicht möglich. Doch kann man dann, wie wir sehen werden, mit Hilfe der Differentialrechnung für *kleine* Änderungen  $x - x_0$  wenigstens näherungsweise eine kompensierende Änderung  $y - y_*$  angeben, derart dass  $|f(x, y) - z|$  von kleinerer Größenordnung ist als  $|x - x_*|$ . Für praktische Zwecke ist das oft ausreichend.

Ist statt einer Gleichung für zwei Variable ein System von  $m$  Gleichungen für  $n > m$  Unbekannte gegeben,

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= y_2 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= y_m \end{aligned} \right\},$$

so wird man erwarten, dass "im Normalfall"  $n - m$  Werte der Variablen  $x_j$  frei als Parameter gewählt werden können und die Werte der restlichen  $m$  Variablen dann durch die  $m$  Gleichungen bestimmt sind. Wir wissen, dass das aber schon im Fall eines Systems von  $m$  linearen Gleichungen nicht allgemein richtig ist, sondern nur, wenn die Gleichungen linear unabhängig sind. Mit der Idee der linearen Approximation lässt sich dieser Sachverhalt aus der Linearen Algebra auf Systeme nichtlinearer Gleichungen übertragen, die durch differenzierbare Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  wie oben gegeben sind — allerdings nur *lokal* in der Nähe einer fixierten Ausgangslösung. Die Unabhängigkeit der nichtlinearen Gleichungen wird dabei durch die Bedingung maximalen Rangs  $m$  für die Ableitungsmatrix von  $F = (f_1, \dots, f_m)$  in der Ausgangslösung formuliert, die ja die Koeffizientenmatrix des approximierenden linearen Gleichungssystems ist. Durch Variablenvertauschung kann man dann immer erreichen, dass die aus den letzten  $m$  Spalten dieser Matrix gebildete  $m \times m$ -Matrix invertierbar ist, und dies ist die Situation, die wir nun annehmen.

**SATZ (über implizite Funktionen):** Die reellen Funktionen  $f_1, \dots, f_m$  seien auf einer Umgebung von  $x^*$  in  $\mathbb{R}^n$  stetig partiell differenzierbar und die aus den letzten  $m < n$  Spalten der Ableitungsmatrix von  $F = (f_1, \dots, f_m)$  gebildete  $m \times m$ -Untermatrix  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n-m+j}}\right)_{1 \leq i, j \leq m}$  sei an der Stelle  $x^*$  invertierbar. Dann gibt es Umgebungen  $U$  zu  $x^*$  in  $\mathbb{R}^n$  und  $V$  zu  $y^* = F(x^*)$  in  $\mathbb{R}^m$ , sowie stetig partiell differenzierbare Funktionen  $g_1(x_1, \dots, x_{n-m}; y), \dots, g_m(x_1, \dots, x_{n-m}; y)$ , die für  $y \in V$  und  $(x_1, \dots, x_{n-m})$  aus einer Umgebung von  $(x_1^*, \dots, x_{n-m}^*)$  in  $\mathbb{R}^{n-m}$  definiert sind und  $g_j(x_1^*, \dots, x_{n-m}^*; y^*) = x_{n-m+j}^*$  erfüllen, derart dass das Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) = y_m \end{array} \right\} \quad \text{bzw.} \quad F(x) = y$$

für rechte Seiten  $y \in V$  als Lösungen in  $U$  genau die Punkte  $x \in U$  besitzt mit

$$\begin{array}{l} x_1, \dots, x_{n-m} \quad \text{beliebig (als freie Parameter wählbar),} \\ \left. \begin{array}{l} x_{n-m+1} = g_1(x_1, \dots, x_{n-m}; y) \\ \vdots \\ x_n = g_m(x_1, \dots, x_{n-m}; y) \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{(eindeutige Funktionen} \\ \text{der freien Parameter} \\ \text{und der rechten Seiten).} \end{array} \end{array}$$

Der Beweis lässt sich mit dem Umkehrsatz führen, den man auf  $H(x) = (x', F(x))$  bei der Stelle  $x^*$  anwendet. Die Ableitungsmatrix von  $H$  an der Stelle  $x^*$  ist invertierbar; denn sie hat Dreiecksblockgestalt  $\begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-m} & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$ , wobei  $A$  die nach Voraussetzung invertierbare Untermatrix der Ableitungsmatrix von  $F$  ist. Nach dem Umkehrsatz ist  $H$  lokal bei  $x^*$  differenzierbar umkehrbar. Die Umkehrabbildung hat die Form  $H^{-1}(x', y) = (x', G(x'; y))$  und das Gleichungssystem  $F(x) = y$  ist für  $x$  nahe  $x^*$  äquivalent zu  $H(x) = (x', y)$  bzw.  $x = H^{-1}(x', y) = (x', G(x'; y))$ . Die Behauptung folgt daher mit den Komponentenfunktionen  $g_j$  von  $G = (g_1, \dots, g_m)$ .

**DISKUSSION 1)** Die entscheidende Voraussetzung des Satzes ist die **Invertierbarkeit der Ableitungsuntermatrix**, die aus den letzten  $m$  Spalten der Ableitungsmatrix von  $F$  an der Stelle  $x^*$  gebildet wird. Das lässt sich durch geeignete Nummerierung der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  erreichen, wenn die Ableitungsmatrix  $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)\right)$  maximalen Rang hat; denn dann sind  $m$  Spalten dieser Matrix linear unabhängig, und bei passender Nummerierung der Variablen eben die letzten  $m$  Spalten. Da der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang ist, kann man die Bedingung maximalen Rangs an der Stelle  $x^*$  so formulieren: Die Gradienten der Funktionen  $f_1, \dots, f_n$  im betrachteten Gleichungssystem sind linear unabhängig in  $x^*$ . Dies ist hier die adäquate Unabhängigkeitsbedingung für die Gleichungen.

Der Satz besagt dann unter dieser Voraussetzung, dass man ausgehend von der Lösung  $F(x^*) = y^*$  die Lösung zu  $F(x) = y$  in differenzierbarer Abhängigkeit von den Parametern  $x_1, \dots, x_{n-m}$  und den rechten Seiten  $y_1, \dots, y_m$  ein Stück weit verfolgen kann, d.h. dass die letzten  $m$  Komponenten der Lösungen  $x$  als differenzierbare Funktionen  $x_{n-m+j} = g_j(x_1, \dots, x_{n-m}; y_1, \dots, y_m)$  darstellbar sind. Man sagt, dass diese Funktionen bzw. die Vektorfunktion  $G = (g_1, \dots, g_m)$  die durch das Gleichungssystem **implizit definierten Funktionen** sind, bzw. dass das Gleichungssystem durch diese Funktionen lokal **differenzierbar nach den letzten  $m$  Variablen aufgelöst** wird. (Natürlich kann man auch nach anderen  $m$  Variablen auflösen, wenn die Ableitungsuntermatrix aus den zugehörigen Spalten invertierbar ist; das ist nur eine Nummerierungsfrage.)



Ausgeschrieben lautet das Gleichungssystem, das die Funktionen  $g_j$  implizit definiert:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x', g_1(x'; y), \dots, g_m(x'; y)) = y_1 \\ f_2(x', g_1(x'; y), \dots, g_m(x'; y)) = y_2 \\ \vdots \\ f_m(x', g_1(x'; y), \dots, g_m(x'; y)) = y_m \end{array} \right\} \quad (x' = (x_1, \dots, x_{n-m}), y = (y_1, \dots, y_m))$$

Oft ist man nicht an einer Variation der rechten Seiten des Gleichungssystems interessiert, sondern betrachtet die  $y_i$  als Konstanten (die man dann auch subtraktiv auf die linke Seite der Gleichungen schreiben kann, so dass die rechten Seiten alle  $= 0$  sind). In diesem Fall unterdrückt man bei den Funktionen  $g_j$  die Notation der Abhängigkeit von den rechten Seiten und schreibt einfach  $g_j(x_1, \dots, x_{n-m})$  statt  $g_j(x_1, \dots, x_{n-m}; y_1, \dots, y_m)$  mit den fixierten Werten  $y_i = y_i^* = f_i(x^*)$ .

2) Im wichtigen *Spezialfall einer einzigen Gleichung*

$$f(x_1, \dots, x_n) = y$$

mit einer reellen stetig differenzierbaren Funktion  $f$  lautet die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen einfach

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \neq 0.$$

Der Satz garantiert dann die Existenz einer Funktion  $g(x_1, \dots, x_{n-1}; y)$  mit stetigen partiellen Ableitungen, die für  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  nahe  $(x_1^*, \dots, x_{n-1}^*)$  und  $y$  nahe  $y^* = f(x^*)$  definiert ist und die Gleichung nahe  $x^*$  nach  $x_n$  auflöst in dem Sinne, dass für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  aus einer Umgebung von  $x^*$  gilt:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = y \iff x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1}; y).$$

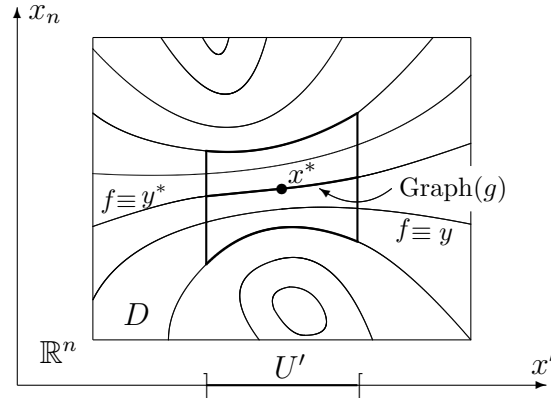
Das ist in diesem Spezialfall auch relativ einfach zu sehen: Ist etwa  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) > 0$ , so ist  $\frac{\partial f}{\partial x_n} \geq \gamma > 0$  auf einem Würfel  $[x_1^* - \delta, x_1^* + \delta] \times \dots \times [x_n^* - \delta, x_n^* + \delta]$ , und  $f$  hängt dort streng wachsend von der letzten Variablen ab, wobei für ein  $\varepsilon > 0$  alle Werte zwischen  $f(x^*) - \varepsilon$  und  $f(x^*) + \varepsilon$  durchlaufen werden, wenn  $x_n$  zwischen  $x_n^* - \delta$  und  $x_n^* + \delta$  variiert (bei fixierten anderen Variablen). Daher ist für  $\max_{i=1}^{n-1} |x_i - x_i^*| < \delta$  und  $|y - y^*| < \varepsilon$  nach dem Zwischenwertsatz klar, dass  $f(x', x_n) = y$  genau eine Lösung  $x_n \in ]x_n^* - \delta, x_n^* + \delta[$  hat. Durch  $g(x_1, \dots, x_{n-1}; y) := x_n$  wird dann die auflösende Funktion definiert, und mit etwas mehr Arbeit kann man auch zeigen, dass  $g$  stetige partielle Ableitungen hat wie  $f$ .

Ist  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0$ , aber  $\nabla f(x^*) \neq 0$ , also eine andere partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) \neq 0$ , so kann man die Gleichung nach der entsprechenden Variablen  $x_j$  differenzierbar auflösen lokal bei  $x^*$ , indem man einfach die Variablen so unnummeriert, dass diese die letzte wird.

3) Die Lösungsmenge einer reellen Gleichung  $f(x) = y$  heißt, wie in 5.2 schon erklärt, die **Niveau-Menge** der Funktion  $f$  zum Niveau  $y$ , bzw. in ökonomischer Terminologie die **Isoquante** oder **Indifferente** von  $f$  zum Niveau  $y$  (ersteres, weil  $f$  an allen Stellen der Lösungsmenge gleiche "Quantität" hat, d.h. denselben Wert, letzteres weil die Funktion gegenüber Variationen des Arguments in der Lösungsmenge "indifferent" ist, d.h. ihren Wert nicht ändert). Bei reellen Funktionen  $f(x, y)$  von zwei Variablen,

sind die Niveaumengen normalerweise Kurven in der Ebene und werden deshalb auch *Niveaukurven*, *Niveaulinien*, *Indifferenzlinien* etc. genannt. Man kann sich hier ein Bild vom Funktionsverlauf machen, indem man einige Niveaulinien zeichnet und daran den jeweiligen Funktionswert (das Niveau) vermerkt, ganz wie die Höhenfunktion auf einer Landkarte durch Höhenlinien mit Höhenangabe dargestellt wird.

Der Satz über implizite Funktionen besagt geometrisch, dass die Niveaumenge einer stetig differenzierbaren reellen Funktion  $f$  von  $n$  Variablen durch einen Punkt  $x^*$  mit  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \neq 0$  lokal bei dieser Stelle als Graph einer stetig differenzierbaren reellen Funktion  $U' \ni x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto g(x')$  von  $n-1$  Variablen dargestellt ist (mit  $g(x') = g(x'; y^*)$  für  $y^* = f(x^*)$ ). Genauer ist es so, dass in einer Umgebung von  $x^*$  (in der Abbildung gerahmt) auch die Niveaumengen zu Niveaus  $y$  nahe  $y^* = f(x^*)$  durch Graphen stetig differenzierbarer reeller Funktionen  $x' \mapsto g(x'; y)$  von  $n-1$  Variablen dargestellt werden, die vom jeweiligen Niveau  $y$  als Parameter stetig differenzierbar abhängen. In diesem Sinne gilt unter der Voraussetzung  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \neq 0$ :



- Die Niveaumenge von  $f: \mathbb{R}^n \subset D \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $x^* \in D$  ist nahe  $x^*$  eine differenzierbare nirgends vertikale Fläche der Dimension  $n-1$  (Kurve, wenn  $n=2$ );
- und die Niveaumengen zu Niveaus  $y$  nahe  $y^* = f(x^*)$  sind ebenfalls solche differenzierbaren Flächen, die eine Umgebung von  $x^*$  "blättern", d.h. überschneidungsfrei ausfüllen.

Das ist der geometrische Inhalt des Satzes über implizite Funktionen. Ist  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) \neq 0$  für einen Index  $j \neq n$ , so hat man im Prinzip dieselbe Situation aus einem anderen Blickwinkel: Die Niveaumengen können dann in manchen Punkten vertikal in Richtung der Achse  $\mathbb{R}e_n$  sein, d.h. eine Parallele dieser Achse als tangentielle Gerade haben, aber die Geraden mit Richtung  $e_j$  schneiden die Niveaumengen nahe  $x^*$  transversal, so dass es sich in Richtung von  $e_j$  gesehen (und nahe bei  $x^*$ ) um Graphen differenzierbarer Funktionen handelt.

Für stetig differenzierbare Vektorfunktionen  $F = (f_1, \dots, f_m)$  auf  $D \subset \mathbb{R}^n$  gelten analoge Aussagen; allerdings spricht man hier meistens von den **Fasern** der Abbildung  $F$  statt von Niveaumengen. Die Fasern  $\{x \in D : F(x) = y\}$  sind lokal bei einer Stelle  $x^* \in D$ , bei der die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen erfüllt ist, Graphen einer  $\mathbb{R}^m$ -wertigen Funktion  $G(x'; y) = (g_1(x'; y), \dots, g_m(x'; y))$  von  $n-m$  Variablen  $x' = (x_1, \dots, x_{n-m})$ , die auch differenzierbar abhängt von den Parametern  $y = (y_1, \dots, y_m)$ , welche den jeweiligen Funktionswert von  $F$  bzw. die jeweiligen Niveaus der Komponentenfunktionen  $f_1, \dots, f_m$  angeben. In diesem Sinne sind die Fasern von  $F$  nahe  $x^*$  differenzierbare Flächen der Dimension  $n-m$  (Kurven im Fall  $m = n-1$ ) und eine Umgebung von  $x^*$  ist durch solche differenzierbaren Flächen "geblättert".

4) Wenn die Voraussetzung nicht erfüllt ist, wenn also die aus den letzten Spalten der Ableitungsmatrix  $(\frac{\partial F}{\partial x}(x^*))$  gebildete quadratische  $m \times m$ -Untermatrix  $A$  nicht invertierbar ist, so ist die Gleichung  $F(x) = y^*$  im Allgemeinen nicht differenzierbar nach  $x_n$

bzw. nach den letzten  $m$  Variablen auflösbar. Das heißt: Es gibt  $x' = (x_1, \dots, x_{n-m})$  beliebig nahe bei  $x^{*'} = (x_1^*, \dots, x_{n-m}^*)$ , derart dass  $F(x', x_{n-m+1}, \dots, x_n) = y^*$  keine oder mehr als eine Lösung  $(x_{n-m+1}, \dots, x_n)$  nahe bei  $(x_{n-m+1}^*, \dots, x_n^*)$  hat oder dass die Lösung nicht differenzierbar von den Parametern  $x_1, \dots, x_{n-m}$  abhängt. Wenn der Rang der Ableitungsmatrix von  $F$  im Punkt  $x^*$  nicht maximal ist, so braucht die Niveaumenge durch  $x^*$  keine differenzierbare  $(n-m)$ -dimensionale Fläche zu sein, sondern sie kann z.B. Selbstschnitte oder Spitzen in  $x^*$  haben oder auch zu einer Menge der Dimension  $< n-m$  degenerieren, im Extremfall sogar zu einem einzigen Punkt.

Und wenn die Gleichung  $F(x) = y^*$  "zufällig" trotz der Nichtinvertierbarkeit der Ableitungsuntermatrix  $A$  doch differenzierbar nach den letzten  $m$  Variablen auflösbar ist nahe  $x^*$ , so kann man jedenfalls der Lösung nicht eindeutig in differenzierbarer Weise bei Variationen der rechten Seite folgen. Genauer gesagt kann die Lösung  $G(x^{*'}; y)$ , wenn sie überhaupt für alle  $y$  nahe  $y^*$  eindeutig existiert, nicht differenzierbar von  $y$  abhängen. Wenn das doch der Fall wäre, so würde man durch Differentiation von  $F(x^{*'}, G(x^{*'}; y)) = y$  nach  $y$  einen Widerspruch erhalten: Die Ableitungsmatrix der linken Seite bzgl.  $y$  an der Stelle  $y^*$  wäre gemäß Kettenregel das Produkt der  $m \times m$ -Matrix  $A$  mit der  $m \times m$ -Ableitungsmatrix  $\left(\frac{\partial G}{\partial y}(x^{*'}; y^*)\right)$  von  $G$  bzgl.  $y$ , aber die Ableitungsmatrix der rechten Seite ist die  $m \times m$ -Einheitsmatrix  $\mathbb{I}_m$ , also müsste  $A$  invertierbar sein entgegen der hier diskutierten Annahme, dass die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen *nicht* erfüllt ist. ■

**BEISPIELE: (1)** Für die Funktion  $f(x, y) = x^2 + y^2$  von zwei Variablen ist  $\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \neq (0, 0)$  an allen Stellen  $(x, y)$  in  $\mathbb{R}_{\neq 0}^2$ . Die Niveaumengen in der Ebene sind außerhalb des Ursprungs also glatte Kurven gemäß Satz über implizite Funktionen. Hier kann man sie genau angeben: Die Niveaukurve zum Niveau  $z > 0$  ist nämlich die Kreislinie vom Radius  $\sqrt{z}$  mit der Gleichung  $x^2 + y^2 = z$ . An allen Stellen  $(x_*, y_*)$  mit  $y_* \neq 0$  ist die Voraussetzung  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) \neq 0$  für differenzierbare Auflösbarkeit der Gleichung  $x^2 + y^2 = z$  nach der Variablen  $y$  erfüllt. Hier kann man die auflösende Funktion explizit bestimmen: Für Niveaus  $z$  nahe  $z_* = x_*^2 + y_*^2$  und  $x$  nahe bei  $x_*$ , so dass  $z - x^2$  noch positiv ausfällt (beachte  $z_* - x_*^2 = y_*^2 > 0$ ), ist die auflösende Funktion gegeben durch  $g(x; z) = (\text{sign } y_*)\sqrt{z - x^2}$ . Der Graph von  $x \mapsto g(x; z)$  ist eine lokale Graphendarstellung der Kreislinie vom Radius  $\sqrt{z}$  um  $(0, 0)$  über der horizontalen Achse. Das Vorzeichen bei  $g$  haben wir so bestimmt, dass  $g(x_*, z_*) = y_*$  ist, so dass die Lösung  $y = g(x; z)$  nahe bei  $y_*$  liegt. Beachte, dass es noch eine zweite Lösung  $y = -(\text{sgn } y_*)\sqrt{z - x^2}$  gibt, die aber nicht nahe bei  $y_*$ , sondern nahe bei  $-y_*$  liegt. Das schließt der Satz über implizite Funktionen nicht aus: Er sagt hier nur, dass es für  $x$  aus einer Umgebung von  $x_*$  und  $z$  aus einer Umgebung von  $z_*$  genau eine Lösung  $y$  gibt, die nahe bei  $y_*$  ist — weiter weg von  $y_*$  kann es durchaus noch weitere Lösungen geben!

Nahe Punkten  $(x_*, 0)$  mit  $x_*^2 = z_* > 0$  ist eine Graphendarstellung der Niveaukurven nicht möglich, weil die Kreislinien mit vertikaler Tangente durch solche Punkte gehen. Die Gleichung  $x^2 + y^2 = z$  hat dann für  $x$  nahe  $x_*$  und  $z$  nahe  $z_*$  entweder keine Lösung (wenn  $x^2 > z$ ) oder genau eine (wenn  $x^2 = z$ ) oder genau zwei Lösungen  $y = \pm\sqrt{z - x^2}$  nahe 0 (wenn  $x^2 < z$ ). Da aber  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y) = 2x_* \neq 0$  ist, kann man nahe solchen Punkten — wie überhaupt bei allen  $(x_*, y_*)$  mit  $x_* \neq 0$  — lokal differenzierbar nach  $x$  auflösen durch  $x = (\text{sign } x_*)\sqrt{z - y^2}$ . Die Kreislinien sind nahe  $(x_*, y_*)$  dann eben lokal als Graphen über der vertikalen Achse dargestellt.

Eine Sonderrolle spielt der Punkt  $(x_*, y_*) = (0, 0)$ , in dem der Gradient verschwindet. Hier ist die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen weder für differenzier-

bare Auflösung nach  $y$  noch nach  $x$  erfüllt, und die Niveaumenge durch den Ursprung ist auch keine differenzierbare Kurve, sondern zu einem Punkt  $\{(0,0)\}$  degeneriert. Man kann der Lösung zu  $x^2 + y^2 = z$  mit fixiertem Parameter  $x = 0$  auch nicht in differenzierbarer Abhängigkeit vom Niveau  $z$  folgen; denn für  $z < 0$  gibt es keine Lösung und für  $z > 0$  zwei Lösungszweige  $y = \pm\sqrt{z}$ , die beide bei  $z = 0$  nicht differenzierbar sind.

**(2)** Auch für die Funktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$  verschwindet der Gradient nur im Ursprung. Die Niveaumengen sind also außerhalb des Ursprungs differenzierbare Kurven (zweiastige nach rechts und links geöffnete Hyperbeln für Niveaus  $> 0$ , zweiastige nach unten und oben geöffnete Hyperbeln für Niveaus  $< 0$ ). Die Niveaumenge  $x^2 - y^2 = 0$  ist die Vereinigung der beiden Diagonalen  $y = \pm x$ , die sich im Ursprung kreuzen. Dort ist die Niveaumenge also nicht lokal eine differenzierbare Kurve, sondern hat eine "Singularität". Entsprechend ist die Auflösung der Gleichung  $x^2 - y^2 = 0$  nach  $y$  in der Nähe des Ursprungs nicht durch eine, sondern nur durch zwei differenzierbare Funktionen  $y = x$  und  $y = -x$  zu beschreiben. So etwas kann nur passieren, wenn die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen (für Auflösung nach irgendeiner Variablen) nicht erfüllt sind.

Mit leichten Modifikationen kann man andere Arten von Singularitäten der Niveaumenge durch einen Punkt produzieren, in dem die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen verletzt ist. Zum Beispiel hat  $g(x, y) = x^4 - y^2$  als Niveaumenge zum Niveau Null die Vereinigung von zwei Parabeln  $y = \pm x^2$ , die sich im Ursprung berühren. Die Niveaumenge hat hier zwar eine Tangente im Nullpunkt, verzweigt sich aber und kann nicht lokal als Graph einer Funktion dargestellt werden. Und die auf  $\mathbb{R}^2$  auch überall stetig differenzierbare Funktion  $h(x, y) = |x|^{3/2} - y^3$  hat als Niveaumenge zum Niveau Null den Graphen der Funktion  $y = \sqrt{|x|}$ , der die Vereinigung von zwei Halbparabeln in der oberen Halbebene mit horizontaler Achse ist, die sich in einer gemeinsamen Spitze im Ursprung berühren. Die Gleichung  $h(x, y) = 0$  ist in diesem Fall zwar durch die Funktion  $y = \sqrt{|x|}$  auflösbar, aber diese Funktion ist nicht differenzierbar in  $x = 0$ .

**(3)** Die Funktionen  $f(x, y) = x^2 - y$ ,  $g(x, y) = (x^2 - y)^2$  und  $h(x, y) = (x^2 - y)^3$  haben im Wesentlichen dieselben Niveaumengen, nämlich vertikal verschobene Normalparabeln  $y = x^2 - z$  bei  $f$  bzw.  $y = x^2 - (\text{sign } z)\sqrt[3]{|z|}$  bei  $h$  und die Vereinigung zweier Parabeln  $y = x^2 \mp \sqrt{z}$  zu Niveaus  $z > 0$  bzw. die Normalparabel  $y = x^2$  zum Niveau  $z = 0$  bei  $g$ . Wegen  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1$  ist die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen bei  $f$  an jeder Stelle erfüllt; die Auflösung von  $f(x, y) = z$  nach  $y$  ist ja auch global differenzierbar möglich mit  $y = x^2 - z$ .

Für  $g$  und  $h$  verschwindet dagegen der Gradient überall auf der Normalparabel; im Nullpunkt ist also die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen für Auflösung nach  $y$  oder  $x$  definitiv nicht erfüllt. Dennoch ist die differenzierbare Auflösung der Gleichungen  $g(x, y) = 0$  und  $h(x, y) = 0$  nach  $y$  hier "zufällig" möglich, nämlich durch  $y = x^2$ . Die Verletzung der Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen zeigt sich aber, wenn wir die rechte Seite variieren und die Lösung zu  $g(x, y) = z$  bzw.  $h(x, y) = z$  beispielsweise für den Parameter  $x = 0$  als Funktion der rechten Seite  $z$  verfolgen wollen. Hier hat  $g(0, y) = z$  überhaupt keine Lösung für  $z < 0$  und zwei Lösungszweige  $\pm\sqrt{z}$  für  $z > 0$ , die bei  $z = 0$  nicht differenzierbar sind. Dagegen hat  $h(0, y) = z$  für alle  $z$  die eindeutige Lösung  $y = -(\text{sign } z)\sqrt[3]{|z|}$ , aber die ist nicht differenzierbar bei  $z = 0$  (Steigung  $-\infty$ ). Die Beispiele  $g, h$  illustrieren Punkt 4) der vorangegangenen Diskussion: Wenn die Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen in einem Punkt verletzt ist, so lässt sich diese Lösung nicht lokal als eindeutige differenzierbare Funktion der rechten Seiten des Gleichungssystems (bei festgehaltenen Werten der Parametervariablen) verfolgen. ■

Nur in sehr einfachen Fällen wie in diesen Beispielen kann man eine nichtlineare Gleichung explizit nach einer Variablen auflösen, oder gar ein System von  $m$  nichtlinearen Gleichungen nach  $m$  der Variablen. Implizit definierte Funktionen sind eben im Allgemeinen nicht durch eine explizite Formel als elementare Funktion darstellbar. Für Anwendungen ist es daher wichtig zu wissen, dass man wenigstens die Ableitungen der impliziten Funktionen, also ihre linearen Approximationen, an den Stellen berechnen kann, die bekannten Lösungen der Gleichung bzw. des Gleichungssystems entsprechen. Es gilt nämlich der

**SATZ (Ableitungen implizit definierter Funktionen):** Ist  $G(x'; y) \in \mathbb{R}^m$  definiert und stetig partiell differenzierbar für  $x' = (x_1, \dots, x_{n-m})$  aus einer offenen Menge in  $\mathbb{R}^{n-m}$  und  $y = (y_1, \dots, y_m)$  aus einer offenen Menge in  $\mathbb{R}^m$  und ist das System

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x'; g_1(x'; y), \dots, g_m(x'; y)) = y_1 \\ \vdots \\ f_m(x'; g_1(x'; y), \dots, g_m(x'; y)) = y_m \end{array} \right\} \iff F(x'; G(x'; y)) = y$$

erfüllt mit der stetig partiell differenzierbaren Funktion  $F = (f_1, \dots, f_m)$  von  $n$  Variablen  $x = (x'; x'') = (x_1, \dots, x_{n-m}; x_{n-m+1}, \dots, x_n)$ , so gilt für die Ableitungsmatrizen der Funktion  $G$  bzgl. der Variablen  $y$  und  $x'$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial G}{\partial y}(x'; y) \right) &= \left( \frac{\partial F}{\partial x''}(x) \right)^{-1}, \\ \left( \frac{\partial G}{\partial x'}(x'; y) \right) &= - \left( \frac{\partial F}{\partial x''}(x) \right)^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial x'}(x) \right), \end{aligned}$$

wobei rechts  $x = (x'; G(x'; y))$  einzusetzen ist.

Dabei ist  $\left( \frac{\partial F}{\partial x''} \right)$  die aus den letzten  $m$  Spalten der Ableitungsmatrix  $\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)$  bestehende  $m \times m$ -Untermatrix und  $\left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right)$  die aus den ersten  $n-m$  Spalten von  $\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)$  bestehende  $m \times (n-m)$ -Untermatrix. Der Nutzen des Satzes besteht darin, dass man damit die Ableitungen der implizit definierten Funktion  $G(x'; y)$  berechnen kann, wenn man die Ableitungen der Funktion  $F = (f_1, \dots, f_m)$  an der Stelle  $x = (x'; G(x'; y))$  kennt — ohne eine explizite Formel für die Funktion  $G$  zu haben!

Der Beweis des Satzes ist eine Anwendung der Kettenregel 5.3. Die Ableitungsmatrix bzgl. der Variablen  $y$  von  $F(x'; G(x'; y))$  ist danach das Produkt  $\left( \frac{\partial F}{\partial x''}(x'; G(x'; y)) \right) \left( \frac{\partial G}{\partial y}(x'; y) \right)$ . Andererseits gilt  $F(x'; G(x'; y)) = y$  und die Ableitungsmatrix  $\left( \frac{\partial y}{\partial y} \right)$  ist die  $m \times m$ -Einheitsmatrix  $\mathbb{I}_m$ . Daraus folgt

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x''}(x'; G(x'; y)) \right) \left( \frac{\partial G}{\partial y}(x'; y) \right) = \mathbb{I}_m$$

und damit die Invertierbarkeit der Matrix  $\left( \frac{\partial F}{\partial x''}(x'; G(x'; y)) \right)$  und die erste behauptete Gleichung. (Das ist übrigens genau die Matrix, deren Invertierbarkeit im Satz über implizite Funktionen vorausgesetzt wird.) Die zweite Gleichung ergibt sich durch Differentiation von  $F(x'; G(x'; y)) = y$  nach den Variablen  $x'$ . Rechts entsteht dabei die Nullmatrix und die Berechnung der Ableitung links mit der Kettenregel ergibt daher

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x'}(x'; G(x'; y)) \right) + \left( \frac{\partial F}{\partial x''}(x'; G(x'; y)) \right) \left( \frac{\partial G}{\partial x'}(x'; y) \right) = 0.$$

Multiplikation mit  $\left( \frac{\partial F}{\partial x''}(x'; G(x'; y)) \right)^{-1}$  liefert dann die zweite behauptete Gleichung. Sie gilt offenbar auch für  $\left( \frac{\partial G}{\partial x'} \right)$ , wenn nur die Gültigkeit des Gleichungssystems für ein festes  $y$  vorausgesetzt und Invertierbarkeit von  $\left( \frac{\partial F}{\partial x''} \right)$  angenommen wird.

**DISKUSSION:** 1) Im Spezialfall einer einzigen Gleichung

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = y$$

mit  $\frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0$  lautet die Formel für die partiellen Ableitungen der implizit definierten Funktion  $g$  einfach

$$\frac{\partial g}{\partial x_h}(x_1, \dots, x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_h}(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))} \quad (h = 1 \dots n-1);$$

denn die Differentiation der Gleichung nach  $x_h$  mit der Kettenregel gibt in diesem Fall

$$\frac{\partial f}{\partial x_h}(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) \frac{\partial g}{\partial x_h}(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0.$$

Geometrisch interpretiert ist  $-\frac{\partial f}{\partial x_h}(x) / \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$  für  $h = 1 \dots n-1$  also die **Steigung der Isoquante** von  $f$  im Punkt  $x$  in Richtung von  $e_h$ , wenn der Nenner  $\neq 0$  ist; denn die Isoquante ist ja dann lokal bei  $x$  der Graph der differenzierbaren Funktion  $g$  mit  $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$  und  $\frac{\partial g}{\partial x_h}(x_1, \dots, x_{n-1})$  ist die Steigung dieses Graphen in Richtung des kanonischen Basisvektors  $e_h$ .

Wir haben hier die rechte Seite  $y$  der Gleichung fixiert und dementsprechend in der Notation die Abhängigkeit der auflösenden Funktion von  $y$  unterdrückt. Die Änderung der auflösenden Funktion bei Variation von  $y$  ergibt sich mit Differentiation der Gleichung  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}; y)) = y$  nach  $y$  zu

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_1, \dots, x_{n-1}; y) = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}; y))}.$$

**2) Anwendung in der Ökonomie** (und nicht nur dort): Wird bei einer reellen Funktion  $f(x, y)$  von zwei Veränderlichen die Variable  $x$  geändert zu  $\tilde{x}$  und soll das Niveau  $z = f(x, y)$  durch eine kompensierende Änderung von  $y$  zu  $\tilde{y}$  aufrecht erhalten werden — das war ja die ursprüngliche Problemstellung —, so ist  $\tilde{y} = g(\tilde{x})$  der exakte geänderte  $y$ -Wert, wenn  $g$  die durch die Gleichung  $f(\xi, g(\xi)) = z$  implizit definierte Funktion mit  $g(x) = y$  ist und  $\tilde{x}$  im Definitionsbereich von  $g$  liegt. Kennt man die Funktion  $g$  nicht explizit — und das wird meistens der Fall sein —, so kann man den Wert  $g(x) + g'(x)(\tilde{x} - x) = y + g'(x)(\tilde{x} - x)$  der Linearisierung von  $g$  um  $x$  als akzeptable Näherung für  $\tilde{y}$  nehmen, wenn  $|\tilde{x} - x|$  klein ist. Ist  $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \neq 0$ , so sagt uns die Ableitungsformel für implizite Funktionen aus dem vorigen Satz bzw. aus 1) oben  $g'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) / \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , also lautet die **Näherungsformel für die kompensierende Variablenänderung** bei  $y$ :

$$\tilde{y} - y \approx -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}(\tilde{x} - x).$$

Beachte, dass die unbekannte implizite Funktion  $g$  in dieser Näherungsformel nicht auftritt, sondern nur die gegebene Funktion  $f$ . Auf dieselbe Näherungsformel kommt man übrigens, wenn man  $f$  durch seine Linearisierung  $f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(\tilde{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(\tilde{y} - y)$  um die Stelle  $(x, y)$  ersetzt und dann  $\tilde{y}$  zu gegebener Änderung  $\tilde{x} - x$  so bestimmt, dass diese Linearisierung an der Stelle  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  denselben Wert  $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(x, y)$  hat wie an der Stelle  $(x, y)$ .

3) Bei einer reellen Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  von  $n \geq 3$  Veränderlichen lautet die entsprechende Näherungsformel für die kompensierende Änderung der letzten Variablen zu gegebenen (kleinen) Änderungen  $\tilde{x}_h - x_h$ ,  $h = 1 \dots n-1$ , der ersten  $n-1$  Variablen:

$$\tilde{x}_n - x_n \approx - \sum_{h=1}^{n-1} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_h}(x_1, \dots, x_n)}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)} (\tilde{x}_h - x_h).$$

Vorausgesetzt ist dabei natürlich  $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \neq 0$ ; andernfalls ist es nicht möglich beliebige kleine Änderungen der Variablen  $x_h$ ,  $1 \leq h < n$ , durch eine Änderung derselben kleinen Größenordnung bei  $x_n$  zu kompensieren. Bei Vektorfunktionen  $F(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$  von  $n$  Variablen  $x = (x_1, \dots, x_n)$  kann man unter der Voraussetzung, dass die Untermatrix der letzten  $m$  Spalten der Ableitungsmatrix von  $F$  invertierbar ist, kleine Änderungen  $\tilde{x}_h - x_h$ ,  $h = 1 \dots n-m$ , bei den ersten  $n-m$  Variablen durch Änderungen  $\tilde{x}_{n-m+j} - x_{n-m+j}$ ,  $j = 1 \dots m$ , bei den letzten  $m$  Variablen so kompensieren, dass die Niveaus  $y_i$  (also die Werte) aller Komponentenfunktionen  $f_i$  erhalten bleiben. Die exakten Werte für diese Kompensation sind  $\tilde{x}_{n-m+j} = g_j(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-m})$  mit den durch das Gleichungssystem  $f_i(\xi, g_1(\xi), \dots, g_m(\xi)) = y_i$  implizit definierten Funktionen  $g_j(\xi) = g_j(\xi_1, \dots, \xi_{n-m})$ , wobei  $g_j(x_1, \dots, x_{n-m}) = x_{n-m+j}$ . Ersetzt man diese Funktionen durch ihre Linearisierung um die Stelle  $(x_1, \dots, x_{n-m})$ , so erhält man mit dem vorigen Satz folgende Näherungsformel für die kompensierenden Änderungen von  $x_{n-m+1}, \dots, x_{n-m}$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n-m+1} - x_{n-m+1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_n - x_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_{n-m+j}}(x) \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_h}(x) \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq h \leq n-m}} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 - x_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-m} - x_{n-m} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

In der theoretischen Ökonomie sind Argumentationen auf dem mathematischen Niveau des letzten Satzes und der obigen Diskussion durchaus gängig. Das ist kein Wunder; denn in der Ökonomie ist der Zusammenhang zwischen ökonomischen Variablen häufig durch Gleichungen gegeben und die Behandlung dieser Gleichungen durch Auszeichnung einiger Variablen als unabhängig (freie Parameter) und Bestimmung der anderen Variablen aus den Gleichungen führt oft auf implizit definierte Funktionen, für die keine explizite elementare Formel zur Verfügung steht. Wir geben dafür nun einige konkrete

**BEISPIELE (ökonomische Anwendungen impliziter Funktionen):**

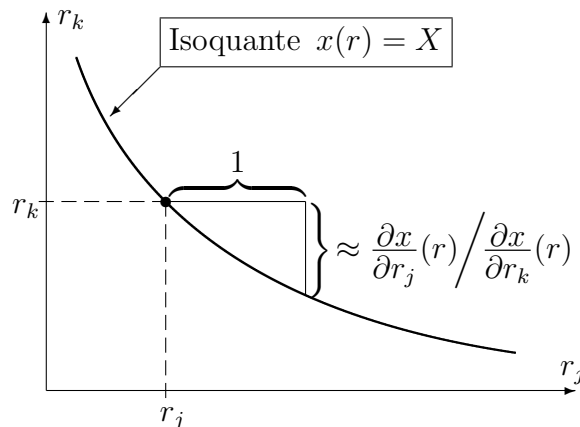
(1) Gegeben sei eine Produktionsfunktion  $x(r_1, \dots, r_n)$ , die den Output einer Produktion (in Mengeneinheiten) in Abhängigkeit vom Einsatz von Produktionsfaktoren  $r_1, \dots, r_n$  (in jeweiligen Faktoreinheiten) angibt. Es wird nun bei Festhalten aller übrigen Faktoreinsätze für zwei Produktionsfaktoren  $r_j$  und  $r_k$  ( $j \neq k$ ) das wechselseitige Substitutionsverhalten untersucht. Man fragt also, um wieviele Einheiten  $r_k$  geändert werden muss, wenn der Faktoreinsatz  $r_j$  um eine kleine Einheit erhöht wird und das Produktionsniveau  $X = x(r_1, \dots, r_n)$  aufrecht erhalten werden soll. Im Fall  $\frac{\partial x}{\partial r_k}(r_1, \dots, r_n) \neq 0$  garantiert der Satz über implizite Funktionen, dass man durch die Gleichung  $x(r_1, \dots, r_j, \dots, r_k, \dots, r_n) = X$  tatsächlich  $r_k$  als differenzierbare Funktion von  $r_j$  definieren kann (nahe den ursprünglichen Werten der Faktoreinsätze und bei c.p.-Bedingung, also konstant gehaltenem Einsatz aller anderen Produktionsfaktoren). Man schreibt dann  $r_k(r_j)$  für diese **Substitutionsfunktion**, die für jeden Wert des Faktors  $r_j$  angibt, wie man den Faktoreinsatz  $r_k$  einzurichten hat, damit das gegebene Produktionsniveau  $X$  eingehalten wird. (Bei vollständiger Angabe aller Abhängigkeiten müsste die Substitutionsfunktion eigentlich  $r_k(r_1, \dots, r_{k-1}, r_{k+1}, \dots, r_n; X)$  notiert werden.)

Für die Substitutionsfunktion gilt also  $x(\dots, r_j, \dots, r_k(r_j), \dots) = X$  und Differentiation nach  $x_j$  mit der Kettenregel bzw. die Formel für die Ableitung implizit definierter Funktionen gibt

$$\frac{dr_k}{dr_j}(r_j) = - \frac{\frac{\partial x}{\partial r_j}(r_1, \dots, r_n)}{\frac{\partial x}{\partial r_k}(r_1, \dots, r_n)}.$$

- Die **Grenzrate der Substitution** des  $j$ -ten durch den  $k$ -ten Faktor ist der negative Quotient der  $j$ -ten und  $k$ -ten Grenzproduktivitäten.

Die ökonomische Interpretation der Grenzrate der Substitution  $\frac{dr_k}{dr_j}(r_j)$  ist die (approximative) Änderung, die bei  $r_k$  vorzunehmen ist, wenn  $r_j$  um eine (kleine) Einheit erhöht und das Produktionsniveau  $X$  eingehalten wird. Entsprechend geben die Grenzproduktivitäten (näherungsweise) an, um wieviele Einheiten der Produktions-Output gesteigert wird, wenn man den jeweiligen Faktoreinsatz um eine (kleine) Einheit erhöht (bei c.p.-Bedingung für die anderen Faktoren). Da Produktionsfunktionen  $x(r_1, \dots, r_n)$  im allgemeinen streng wachsend von jeder einzelnen Variablen abhängen, sind die Grenzproduktivitäten typischerweise positiv. Das Minuszeichen in der Formel für die Grenzrate der Substitution drückt daher aus, dass man bei Erhöhung (bzw. Erniedrigung) des Faktoreinsatzes  $r_j$  den Faktoreinsatz  $r_k$  zu vermindern (bzw. zu steigern) hat, um das Produktionsniveau beizubehalten. Mit anderen Worten: Die Substitutionsfunktionen  $r_k(r_j)$  sind typischerweise streng fallend (mit negativer Ableitung). Die geometrische Deutung der Substitutionsfunktion ist, dass ihr Graph in der  $(r_j, r_k)$ -Ebene (die anderen konstant gehaltenen Faktoreinsätze werden in der Notation unterdrückt) die Isoquante der Produktionsfunktion zum Niveau  $X$  ist. Diese Isoquante ist also eine von links nach rechts fallende Kurve im positiven Quadranten, und der Betrag ihrer negativen Steigung ist an jeder Stelle das Verhältnis der entsprechenden Grenzproduktivitäten.



(2) Ganz analoge Begriffsbildungen hat man in anderem ökonomischem Zusammenhang, z.B. bei einer *Nutzenfunktion*  $U(x_1, \dots, x_n)$ , welche den Nutzen des Einsatzes von  $x_1, x_2, \dots, x_n$  Einheiten von  $n$  nutzenstiftenden Gütern beschreibt. Ist  $\frac{\partial U}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ , so kann man durch die Bedingung, dass der Nutzen  $U$  und die Einsatzmengen  $x_i$  für  $j \neq i \neq k$  konstant gehalten werden,  $x_k$  als implizit definierte Funktion von  $x_j$  auffassen (für Werte nahe der ursprünglichen Situation;  $k \neq j$ ). Man erhält dann für die **Grenzrate der Substitution** des  $j$ -ten durch das  $k$ -te Gut:

$$\frac{dx_k}{dx_j}(x_j) = - \frac{\frac{\partial U}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)}{\frac{\partial U}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n)},$$

also das Negative des Verhältnisses des  $j$ -ten und  $k$ -ten Grenznutzens. Die Isoquanten der (als Funktion der zwei Variablen  $x_j, x_k$  aufgefassten) Nutzenfunktion heißen hier *Indifferenzlinien*; die Indifferenzlinie zu einem gegebenen Nutzenniveau ist der Graph der zugehörigen Substitutionsfunktion  $x_k(x_j)$ . Diese Substitutionsfunktionen sind typischerweise streng fallend, ihre negative Graphensteigung in einem Punkt  $(x_j, x_k(x_j))$  ist die Grenzrate der Substitution an der jeweiligen Stelle  $x_j$ .



(3) Häufig haben die Isoquanten / Indifferenzkurven in Situationen wie oben nicht nur negative Steigung (d.h. die Grenzrate der Substitution ist negativ), sondern sie, bzw. die Substitutionsfunktionen, sind auch degressiv fallend, d.h. der Absolutbetrag der negativen Steigung nimmt mit zunehmendem Wert der unabhängigen Variablen ab. Dieses Verhalten, also degressives Fallen der Substitutionsfunktion, bezeichnet man als *abnehmende Grenzrate der Substitution*. Es bedeutet, dass man zur Kompensation der Erhöhung der unabhängigen Variablen um eine Einheit, bei der substituierenden abhängigen Variablen umso weniger sparen kann, je größer der Wert der unabhängigen Variablen ist. Das ist oft eine ökonomisch sinnvolle Annahme (Erhöhung eines ohnehin schon sehr großen Faktoreinsatzes um eine Einheit bringt relativ wenig). Mathematisch lassen sich u.a. folgende hinreichende **Kriterien für abnehmende Grenzrate der Substitution** für eine gegebene reelle (Produktions-, Nutzen-)Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  aufstellen:

- (i)  $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  ist bezüglich jeder einzelnen Variablen  $x_j$  konkav und wachsend, also neoklassisch, und die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k}$  sind nichtnegativ;
- (ii) oder  $f$  ist konkave Funktion von  $x = (x_1, \dots, x_n)$  (nicht nur konkav in jeder einzelnen Variablen) und wachsend bzgl. jeder einzelnen Variablen.

Das Kriterium (i) ergibt sich durch Differentiation der Gleichung für die Grenzrate der Substitution  $\frac{dx_k}{dx_j}(x_j) = -\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x_k(x_j)) / \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_j, x_k(x_j))$  nach  $x_j$  (die anderen Variablen  $x_i$  mit  $j \neq i \neq k$  notieren wir nicht):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_k}{dx_j^2} &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^{-2} \left[ -\frac{\partial f}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \frac{dx_k}{dx_j} \right) + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \frac{dx_k}{dx_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^{-3} \left[ -\left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \frac{dx_k}{dx_j} - \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \right], \end{aligned}$$

und wegen der Voraussetzungen  $\frac{\partial f}{\partial x_j} > 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_k} > 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} < 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} < 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \geq 0$  ist der letzte Ausdruck positiv, die negative Grenzrate der Substitution also zunehmend und die absolute Grenzrate abnehmend. (statt der Nichtnegativität der gemischten zweiten Ableitungen genügt hier sogar die Bedingung  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \geq -\sqrt{\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}}$ .)

Zum Beweis des Kriteriums (ii) betrachten wir zwei Werte  $x_j, \tilde{x}_j$  und benutzen die Konkavitätsungleichung für  $f$ , um für  $0 \leq t \leq 1$  und das Niveau  $y$ , zu dem die Substitutionsfunktion  $x_k(x_j)$  definiert ist, die Ungleichung

$$\begin{aligned} &f((1-t)x_j + t\tilde{x}_j, (1-t)x_k(x_j) + tx_k(\tilde{x}_j)) \\ &\geq (1-t)f(x_j, x_k(x_j)) + t f(\tilde{x}_j, x_k(\tilde{x}_j)) = (1-t)y + ty = y \end{aligned}$$

zu folgern. Andererseits ist  $f((1-t)x_j + t\tilde{x}_j, x_k((1-t)x_j + t\tilde{x}_j)) = y$  nach Definition der Substitutionsfunktion. Da  $f(\dots)$  nach Voraussetzung in der  $k$ -ten Variablen wächst, folgt

$$(1-t)x_k(x_j) + tx_k(\tilde{x}_j) \geq x_k((1-t)x_j + t\tilde{x}_j),$$

und das ist gerade die behauptete Konkavität der Substitutionsfunktion. (Man hat bei diesem Argument die Konkavität von  $f$  auf der Strecke von  $(x_j, x_k(x_j))$  nach  $(\tilde{x}_j, x_k(\tilde{x}_j))$  im Definitionsbereich ausgenutzt, daher genügt die Konkavität von  $f$  bzgl. jeder einzelnen Variablen hier nicht. Aber Konkavität als Funktion der zwei Variablen  $(x_j, x_k)$  bei c.p.-Bedingung für die restlichen Variablen genügt natürlich für abnehmende Grenzrate der Substitution von  $x_j$  durch  $x_k$ .)

(4) Betrachten wir konkret eine *Produktionsfunktion vom Cobb–Douglas–Typ*, die von den Produktionsfaktoren Arbeit  $A > 0$  und Kapital  $K > 0$  abhängt:

$$x(A, K) = 0.5 A^{0.4} K^{0.6}.$$

Die Isoquante zum Produktionsniveau 4 ist gegeben durch

$$0.5 A^{0.4} K^{0.6} = 4$$

was zum Beispiel nach  $K$  aufgelöst werden kann:

$$K = 8^{1/0.6} A^{-0.4/0.6} = 8^{5/3} A^{-2/3} = 32 A^{-2/3}.$$

Dies ist also die Substitutionsfunktion für Substitution des Faktors Arbeit durch Kapital, und die Grenzrate dieser Substitution ist

$$\frac{dK}{dA} = -\frac{64}{3} A^{-5/3}.$$

Der Quotient der Grenzproduktivitäten von Arbeit und Kapital ist andererseits

$$\frac{\partial x / \partial A}{\partial x / \partial K} = \frac{0.5 \cdot 0.4 \cdot A^{-0.6} \cdot K^{0.6}}{0.5 \cdot A^{0.4} \cdot 0.6 \cdot K^{-0.4}} = \frac{2}{3} A^{-1} K = \frac{2}{3} \cdot A^{-1} \cdot 32 A^{-2/3} = \frac{64}{3} A^{-5/3},$$

also das Negative der Grenzrate der Substitution — wie es ja auch nach der Ableitungsformel für implizit definierte Funktionen sein muss (siehe Punkt 1) der vorangegangenen Diskussion).

Hier ist  $|\frac{dK}{dA}| = \frac{64}{3} A^{-5/3}$  eine abnehmende Funktion von  $A$ , es gilt also das Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution. Das hätte man aus dem Kriterium (i) in (3) oben auch von vorneherein sehen können, da  $x(A, K)$  in jeder der Variablen  $A, K$  wachsend und konkav ist mit positiver gemischter Ableitung  $\frac{\partial^2 x}{\partial A \partial K}$ . Bei  $A \rightarrow \infty$  strebt  $\frac{dK}{dA} \rightarrow 0$ , was bedeutet, dass bei Produktion mit schon sehr hohem Arbeitseinsatz eine Erhöhung beim Faktor Arbeit praktisch keine Kapitaleinsparung mehr bringt (in diesem mathematischen Modell des Produktionsvorgangs).

(5) Dieselbe Diskussion kann man offenbar für beliebige *Cobb–Douglas–Funktionen* auf  $\mathbb{R}_{>0}^n$

$$f(x_1, \dots, x_n) = c x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n}$$

mit Exponenten  $s_j > 0$  und Koeffizient  $c > 0$  durchführen. Ist  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  das gegebene Niveau, so ergibt die Auflösung nach  $x_k$  die explizite Substitutionsfunktion

$$x_k = \left(\frac{y}{c}\right)^{1/s_k} x_1^{-s_1/s_k} \cdot \dots \cdot x_{k-1}^{-s_{k-1}/s_k} x_{k+1}^{-s_{k+1}/s_k} \cdot \dots \cdot x_n^{-s_n/s_k}$$

als Funktion der Variablen  $x_j, j \neq k$ , und des Niveaus  $y$ . Man sieht, dass  $x_k$  Vielfaches einer Potenzfunktion von  $x_j$  mit negativem Exponenten ist, also *sind die Isoquanten hier Graphen konvexer Funktionen* und das Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution ist erfüllt. Das gilt für beliebige positive Exponenten  $s_j$ . Die Konkavitätseigenschaften der Cobb–Douglas–Funktion  $f$  hängen dagegen von den Exponenten ab. Genau wenn  $0 < s_j < 1$  ist, hängt  $f(x_1, \dots, x_n)$  streng konkav von der Variablen  $x_j$  ab, und genau wenn die Exponentensumme  $s = s_1 + \dots + s_n < 1$  ist, hat man Konkavität von  $f(x)$  als Funktion der vektoriellen Variablen  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$  (also Konkavität auf jeder Strecke in  $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ ; das haben wir in 5.6 gezeigt). ■

Wie oft in der Ökonomie, so ist es auch bei Substitutionsfunktionen sinnvoll, als ein von Einheitenwahlen unabhängiges Maß der Änderung die Elastizität zu betrachten.

**DEFINITION:** Ist  $x_k(x_j)$  eine implizit durch die Gleichung

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k(x_j), \dots, x_n) = y \quad (\text{bei konstanten } x_i \text{ für } j \neq i \neq k)$$

definierte "Substitutionsfunktion", so heißt ihre Elastizität die **implizite Elastizität** von  $x_k$  bzgl.  $x_j$  zur gegebenen Funktion  $f$  und dem Niveau  $y$  und wird notiert

$$\mu_{x_k, x_j}^{(f; y)}(x) = \mu_{x_k, x_j}(x) := \varepsilon_{x_k}(x_j) = \frac{x_j \frac{dx_k}{dx_j}(x_j)}{x_k(x_j)}.$$

Diese implizite Elastizität wird auch **Elastizität der Substitutionsfunktion** oder **Elastizität der technischen Substitution** genannt. ■

**DISKUSSION:** 1) *Ökonomische Bedeutung:* Die implizite Elastizität  $\mu_{x_k, x_j}(x)$  gibt an, um wieviel Prozent der Variablenwert  $x_k$  (ungefähr) geändert werden muss, wenn  $x_j$  um 1% erhöht wird und das Niveau aufrecht erhalten werden soll. Wie immer im Zusammenhang mit Elastizitäten wird hier natürlich angenommen, dass die Variablen  $x_j$  und  $x_k$  nur positive Werte annehmen. Die Abhängigkeit der impliziten Elastizität von den anderen Variablen  $x_i$ ,  $j \neq i \neq k$ , wird oft nicht notiert, ebenso nicht die Abhängigkeit vom Niveau  $y$  und von der zu Grunde liegenden Funktion  $f$ , durch welche die Substitutionsfunktion implizit definiert ist.

(2) Drücken wir die Grenzrate der Substitution mit der Formel für die Ableitung impliziter Funktionen durch partielle Ableitungen von  $f$  aus (vgl. (1) der vorangehenden Beispiele) und erweitern mit  $f(x)$ , unterstellt dass  $f$  eine positive Funktion ist, so ergibt sich:

$$\mu_{x_k, x_j}(x) = - \frac{\frac{x_j}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)}{\frac{x_k}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)} = - \frac{\varepsilon_{f, x_j}(x)}{\varepsilon_{f, x_k}(x)} \quad (x_k = x_k(x_j)).$$

- Die implizite Elastizität von  $x_k$  bzgl.  $x_j$  ist das Negative des Quotienten der partiellen Elastizitäten von  $f$  bzgl.  $x_j$  und  $x_k$ .

Sind die partiellen Elastizitäten von  $f$  positiv, d.h.  $f(x_1, \dots, x_n)$  hängt wachsend von jeder einzelnen Variablen ab, so sind also die impliziten Elastizitäten negativ, d.h. man muss  $x_k$  vermindern bei (geringer) Erhöhung von  $x_j$ , um das Niveau aufrecht zu erhalten.

(3) Weil die Substitutionsfunktionen  $x_k(x_j)$  durch die Bedingung konstanten Niveaus  $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k(x_j), \dots, x_n) = y$  definiert sind, hängen sie nur von den Niveaumengen von  $f$  ab.

- Die impliziten Elastizitäten  $\mu_{x_k, x_j}(x)$  hängen nur von der Niveaumenge der definierenden Funktion  $f$  durch den Punkt  $x$  ab.
- Zwei Funktionen mit denselben Niveaumengen haben folglich auch gleiche implizite Elastizitäten an allen Stellen, wo diese definiert sind.

Ist  $\varphi$  eine streng monotone Funktion aus  $\mathbb{R}$ , so haben  $f$  und die Verkettung  $\varphi \circ f$  dieselben Niveaumengen (zum Niveau  $y$  bei  $f$  und zum Niveau  $\varphi(y)$  bei  $\varphi \circ f$ ). Umgekehrt ist z.B. auf einem konvexen Definitionsbereich jede stetige Funktion  $g$  mit denselben Niveaumengen wie die stetige reelle Funktion  $f$  von der Form  $g = \varphi \circ f$  mit einer streng monotonen stetigen Funktion  $\varphi$  auf  $\mathbb{R}$ . ■

**BEISPIEL:** Wir berechnen die impliziten Elastizitäten einer Cobb–Douglas–Funktion

$$f(x_1, \dots, x_n) = c x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n}$$

auf  $\mathbb{R}_{>0}^n$  mit Koeffizient  $c > 0$  und Exponenten  $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R}$ . Die partiellen Elastizitäten sind  $\varepsilon_{f,x_j}(x) = \frac{x_j}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = s_j$  konstant, also gilt auch

$$\mu_{x_k,x_j}(x) = -\frac{\varepsilon_{f,x_j}(x)}{\varepsilon_{f,x_k}(x)} = -\frac{s_j}{s_k} \text{ konstant.}$$

- Die impliziten Elastizitäten  $\mu_{x_k,x_j}$  einer Cobb–Douglas–Funktion sind konstant gleich dem Negativen Quotienten  $-s_j/s_k$  der entsprechenden Exponenten.

Der Wert der Elastizität hängt also auch nicht ab von den Werten der anderen festgehaltenen Variablen  $x_i$  und auch nicht vom Niveau  $y$  zu dem die impliziten Elastizitäten definiert werden. Wir werden noch sehen, dass die Konstanz der impliziten Elastizitäten die Cobb–Douglas–Funktionen unter den homogenen Funktionen auf  $\mathbb{R}_{>0}^n$  kennzeichnet (“CD–Theorem”, s.u.). ■

Im Zusammenhang mit Substitutionsfunktionen gibt es noch eine andere in der Wirtschaftsmathematik verwendete Elastizität, die aber nicht das Änderungsverhalten der Substitutionsfunktionen selbst beschreibt, sondern das ihrer Ableitung, also der Grenzrate der Substitution. Es handelt sich dabei um eine Größe zweiter Ableitungsordnung, welche die Degressivität der Substitutionsfunktionen unabhängig von Einheiten misst.

**DEFINITION und DISKUSSION;** (1) Wir betrachten wieder eine Funktion  $r_k(x_j)$ , die implizit definiert ist durch eine Gleichung  $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k(x_j), \dots, x_n) = y$ . Mit der **Substitutionselastizität** oder **Elastizität der Substitution** ist dann in der Wirtschaftsmathematik (unglücklicherweise entgegen dem unmittelbaren Wortsinn) nicht die Elastizität  $\mu_{x_k,x_j}$  dieser Substitutionsfunktion gemeint, sondern eine kompliziertere Größe  $\sigma_{x_k,x_j}$  zweiter Ableitungsordnung, für die in der Literatur mysteriöse Formeln angegeben werden wie z.B.

$$\sigma_{x_k,x_j} = \frac{d\left(\frac{x_k}{x_j}\right) / \frac{x_k}{x_j}}{d\left(\frac{dx_k}{dx_j}\right) / \frac{dx_k}{dx_j}} = \frac{\frac{dx_k}{dx_j}}{\frac{x_k}{x_j}} \cdot \frac{d\left(\frac{x_k}{x_j}\right)}{d\left(\frac{dx_k}{dx_j}\right)}$$

oder

$$\sigma_{x_k,x_j} = \frac{d\left(\frac{x_k}{x_j}\right) / \frac{x_k}{x_j}}{d\left(\frac{\partial f / \partial x_j}{\partial f / \partial x_k}\right) / \frac{\partial f / \partial x_j}{\partial f / \partial x_k}}.$$

Gemeint ist damit die relative Änderung des Quotienten  $x_k/x_j$  der “Inputfaktoren” im Verhältnis zur relativen Änderung der Grenzrate der Substitution  $\frac{dx_k}{dx_j}$ . Man fasst also die Grenzrate der Substitution als unabhängige Variable auf und den Quotienten  $x_k/x_j$  als Funktion dieser Variablen; die Elastizität dieser Funktion ist dann  $\sigma_{x_k,x_j}$ . Sie sollte also **Elastizität des Faktorverhältnisses bzgl. der Substitutionsgrenzrate** heißen. Die Substitutionselastizität gibt (näherungsweise) die prozentuale Änderung des Faktorverhältnisses  $x_k/x_j$  an, wenn der Punkt  $(x_j, x_k)$  auf der Isoquante mit der Gleichung  $f(\dots, x_j, \dots, x_k, \dots) = y$  (bei c.p.–Bedingung) so verschoben wird, dass die absolute Steigung  $\left|\frac{dx_k}{dx_j}\right|$  der Isoquante um 1% zunimmt.

Hierbei wird angenommen, dass  $\frac{dx_k}{dx_j}$  wie üblich negativ ist; also ist  $|\frac{dx_k}{dx_j}| = \frac{\partial f}{\partial x_j} / \frac{\partial f}{\partial x_k}$  das Verhältnis der Grenzfunktionswerte bzgl.  $x_j$  und  $x_k$ . Da bei Erhöhung der absoluten Steigung auch der Quotient  $x_k/x_j$  vergrößert wird, ist  $\sigma_{x_k, x_j}$  dann positiv. (In der Literatur findet sich auch die Konvention, dass das umgekehrte Verhältnis  $\frac{\partial f}{\partial x_k} / \frac{\partial f}{\partial x_j}$  um 1 % zu erhöhen ist; wegen  $1.01 \approx 1/0.99$  läuft das auf eine Erniedrigung von  $|\frac{dx_k}{dx_j}|$  um 1 % hinaus, was zu einem negativen Vorzeichen der Substitutionselastizität führt.)

Es erscheint vielleicht abwegig, die direkt nicht beeinflussbare Grenzrate der Substitution hier als unabhängige Variable zu betrachten. Einleuchtender wäre es, das unmittelbar beeinflussbare Verhältnis  $x_k/x_j$  der Inputfaktoren als unabhängige Variable zu nehmen und die absolute Substitutionsgrenzrate  $|\frac{dx_k}{dx_j}|$  als Funktion davon aufzufassen. Aber das läuft fast auf dasselbe hinaus, weil dies dann die Umkehrfunktion der oben betrachteten Funktion ist und ihre Elastizität das Reziproke der oben definierten Substitutionselastizität.

2) Um die Definition der Substitutionselastizität in mathematisch akzeptabler Weise abzufassen, nehmen wir an, dass eine in der  $(x_j, x_k)$ -Ebene betrachtete Isoquantenlinie als Kurve  $(x_j(t), x_k(t))$  mit einem reellen Parameter  $t$  parametrisiert ist (wobei alle  $x_i$  mit  $j \neq i \neq k$  konstant gehalten werden). Dann ist der Faktorquotient  $x_k(t)/x_j(t)$  eine Funktion von  $t$  und die Substitutionsgrenzrate  $\frac{dx_k}{dx_j}(x_j(t))$  ebenfalls. Die Änderungen dieser Funktionen  $\frac{d}{dt} \frac{x_k(t)}{x_j(t)}$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{dx_k}{dx_j}(x_j(t)) \right)$  als Funktionen des Parameters  $t$  sind dann zwar von der Wahl Parametrisierung abhängig, nicht aber der Quotient dieser Änderungen; denn bei einem Wechsel der Parametrisierung durch eine Parametertransformation  $t \mapsto \tau(t)$  kürzt sich der bei Ableitung nach  $\tau$  statt nach  $t$  entstehende Faktor  $\frac{dt}{d\tau}$  im Quotienten heraus. Daher ist auch der Quotient der relativen Änderungen unabhängig von der Parametrisierung und gibt die gewünschte **Definition der Substitutionselastizität**:

$$\sigma_{x_k, x_j}^{(f; y)}(x) := \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{x_k(t)}{x_j(t)} \right) / \frac{x_k(t)}{x_j(t)}}{\frac{d}{dt} \left( \frac{dx_k}{dx_j}(x_j(t)) \right) / \frac{dx_k}{dx_j}(x_j(t))} \quad \begin{array}{l} (x_j = x_j(t), x_k = x_k(t), \\ f(\dots, x_j(t), \dots, x_k(t), \dots) = y, \\ x_i \text{ konstant für } j \neq i \neq k.) \end{array}$$

Vorausgesetzt ist dabei natürlich  $x_j > 0$ ,  $x_k > 0$ ,  $\frac{dx_k}{dx_j} \neq 0$  und  $\frac{d}{dt} \frac{dx_k}{dx_j}(x_j(t)) \neq 0$ , d.h. die Grenzrate der Substitution muss eine streng monotone Funktion des Parameters  $t$  mit nirgends verschwindender Ableitung sein. Nehmen wir  $t = x_j$  als Parameter, also die Graphenparametrisierung der Isoquante, so ergibt sich wegen  $\frac{d}{dx_j} \frac{x_k(x_j)}{x_j} = \frac{1}{x_j^2} \left[ x_j \frac{dx_k}{dx_j}(x_j) - x_k(x_j) \right]$  die Formel

$$\sigma_{x_k, x_j}(x) = \frac{x_j \left( \frac{dx_k}{dx_j}(x_j) \right)^2 - x_k \frac{dx_k}{dx_j}(x_j)}{x_j x_k \frac{d^2 x_k}{dx_j^2}(x_j)} \quad (x_k = x_k(x_j)),$$

was mit  $x, y(x)$  statt  $x_j, x_k(x_j)$  ganz kurz so geschrieben wird:

$$\sigma_{y, x}(x, y) = \frac{xy'^2 - yy''}{xyy''} \quad (f(x, y) = \text{const}).$$

(Dabei ist hier  $y$  die abhängige Variable, also die Substitutionsfunktion, und natürlich nicht das konstant gehaltene Produktionsniveau.) Voraussetzung ist neben  $x_j > 0$ ,  $x_k > 0$

dabei wieder, dass  $\frac{dx_k}{dx_j} \neq 0$  und  $\frac{d^2x_k}{dx_j^2} \neq 0$  sind. Bei streng abnehmenden Substitutionsfunktionen, die dem Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution  $\frac{d^2x_k}{dx_j^2} > 0$  genügen, sind diese Voraussetzungen gegeben.

Man sieht an diesen Formeln für die Substitutionselastizität, dass es sich um eine Größe zweiter Ableitungsordnung handelt; denn es gehen ja die zweiten Ableitungen der Substitutionsfunktion ein.

**3)** Der in 2) angegebene Ausdruck für die Substitutionselastizität ist zur Berechnung geeignet, wenn die Substitutionsfunktion  $x_k(x_j)$  explizit bekannt ist. Da diese Funktion aber implizit durch  $f(\dots, x_j, \dots, x_k(x_j), \dots) = y$  definiert ist, wird das normalerweise nicht der Fall sein. Deshalb brauchen wir noch eine Formel für die Substitutionselastizität, in der nur partielle Ableitungen der definierenden Funktion  $f$  auftreten. Diese lässt sich durch Differentiation der Formel für die Grenzrate der Substitution (Ableitung implizit definierter Funktionen)

$$\frac{dx_k}{dx_j}(x_j) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_j, x_k(x_j))}{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_j, x_k(x_j))}$$

herleiten (wobei die festgehaltenen Variablen  $x_i$  nicht notiert sind):

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_k}{dx_j^2} &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \frac{dx_k}{dx_j} \right) - \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \frac{dx_k}{dx_j} \right)}{\left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2} \\ &= -\frac{\left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} + \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}}{\left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^3}, \end{aligned}$$

wobei wir zuletzt die vorangegangene Formel für  $\frac{dx_k}{dx_j}$  eingesetzt haben. Auszuwerten ist der letzte Ausdruck natürlich an der Stelle  $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_k(x_j), \dots, x_n)$ . Setzt man die für  $\frac{dx_k}{dx_j}$  und  $\frac{d^2x_k}{dx_j^2}$  gefundenen Ausdrücke nun in die Formel für  $\sigma_{x_k, x_j}(x)$  in 3) ein, so erhalten wir das gewünschte Resultat:

$$\sigma_{x_k, x_j}^{(f; y)}(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_k} \left[ x_j \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 - x_k \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \right]}{x_j x_k \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} + \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \right]},$$

wobei  $x_k = x_k(x_j)$  und in die partiellen Ableitungen von  $f$  sowie bei  $\sigma_{x_k, x_j}(x)$  natürlich wieder die Stelle  $x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_k(x_j), \dots, x_n)$  einzusetzen ist. Die Voraussetzungen für die Definition der Substitutionselastizität sind erfüllt, wenn die partiellen Ableitungen erster Ordnung  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  nicht Null sind (oft wird Positivität vorausgesetzt) und wenn der Nenner in dieser Formel nicht verschwindet.

**5)** Weil die Substitutionselastizitäten durch Ableitungen erster und zweiter Ordnung einer Parametrisierung der Isoquantenkurve berechnet werden, gilt natürlich für sie wie bei den impliziten Elastizitäten:

- Die Substitutionselastizitäten  $\sigma_{x_k, x_j}^{(f; y)}(x)$  hängen nur von der Niveaumenge der definierenden Funktion  $f$  durch den Punkt  $x$  ab. ■

Man darf bezweifeln, dass Ausdrücke, welche die zweiten Ableitungen einer im Allgemeinen gar nicht genau bekannten ökonomischen Funktion enthalten wie in den obigen Formeln für die Substitutionselastizitäten, überhaupt noch ein sinnvolles mathematisches Modell ökonomischer Abhängigkeiten ergeben können in dem Sinne, dass noch ein Bezug zu realen Gegebenheiten vorhanden ist. Aber die Substitutionselastizität ist keine Erfindung der Mathematiker, sondern der theoretisch arbeitenden Ökonomen!

**BEISPIELE:** (1) Für eine *Cobb–Douglas–Funktion* auf  $\mathbb{R}_{>0}^n$ ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = c x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n},$$

mit Koeffizient  $c > 0$  und Exponenten  $s_j \in \mathbb{R}$  hatten wir oben die Substitutionsfunktionen zum Niveau  $y$  explizit berechnet:

$$x_k = \left(\frac{y}{c}\right)^{1/s_k} x_1^{-s_1/s_k} \cdot \dots \cdot x_{k-1}^{-s_{k-1}/s_k} x_{k+1}^{-s_{k+1}/s_k} \cdot \dots \cdot x_n^{-s_n/s_k}.$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{dx_k}{dx_j} = -\frac{s_j x_k(x_j)}{s_k x_j}, \quad \frac{d^2 x_k}{dx_j^2} = x_k(x_j) \frac{s_j}{s_k} \left(1 + \frac{s_j}{s_k}\right) \frac{1}{x_j^2}$$

und mit Einsetzen in die oben für die Substitutionselastizität hergeleitete Formel

$$\sigma_{x_k, x_j}(x) = \frac{x_j \left(\frac{dx_k}{dx_j}(x_j)\right)^2 - x_k \frac{d^2 x_k}{dx_j^2}(x_j)}{x_j x_k \frac{d^2 x_k}{dx_j^2}(x_j)} = \frac{\frac{x_k^2}{x_j} \left(\frac{s_j}{s_k}\right)^2 + \frac{x_k^2}{x_j} \frac{s_j}{s_k}}{\frac{x_k^2}{x_j} \frac{s_j}{s_k} \left(1 + \frac{s_j}{s_k}\right)} = 1$$

sofern  $s_j \neq 0$ ,  $s_k \neq 0$  und  $s_j + s_k \neq 0$  (was z.B. erfüllt ist, wenn alle Exponenten positiv sind). Ist  $s_j = 0$  oder  $s_k = 0$  oder  $s_j + s_k = 0$ , so ist die Substitutionsfunktion  $x_k(x_j)$  nicht definiert oder sie hat zweite Ableitung Null, so dass die Substitutionselastizität nicht erklärt ist.

- Die Substitutionselastizität einer *Cobb–Douglas–Funktion* ist konstant 1.

(Durch Einführung der absoluten Substitutionsgrenzrate  $R = \left|\frac{dx_k}{dx_j}\right|$  als unabhängige Variable, also  $R = \frac{s_j}{s_k} \frac{x_k(R)}{x_j(R)}$ , sehen wir übrigens direkt, dass  $x_k/x_j$  als Funktion von  $R$  aufgefasst die Elastizität 1 hat. Das entspricht dem ursprünglichen Konzept der Substitutionselastizität.)

(2) Es gibt noch andere Funktionen als die *Cobb–Douglas–Funktionen*, deren Substitutionselastizität konstant 1 ist. Ein Beispiel ist

$$f(x, y) = \frac{r \ln y + a}{s \ln x + b} \quad (r, s \in \mathbb{R}_{\neq 0}).$$

Hierfür gilt  $f(x, y) = z \iff r \ln y + a = z(s \ln x + b) \iff y^r e^a = x^{zs} e^{cb} \iff y = e^{(cb-a)/r} x^{cs/r}$ , und diese Funktion  $y(x)$  hat Substitutionselastizität 1 bei Niveau  $z \neq 0$ ; denn für  $R = y'(x) = \frac{cs}{r} \frac{y(x)}{x}$  hat der Quotient  $\frac{y(x)}{x} = \frac{r}{cs} R$  als Funktion von  $R$  konstante Elastizität 1. Diese Funktion ist keine *Cobb–Douglas–Funktion*, weil sie z.B. nicht homogen ist. Tatsächlich sind die *Cobb–Douglas–Funktionen* die einzigen homogenen Funktionen mit konstanten Substitutionselastizitäten 1 (siehe das “*CD–Theorem*” unten).

(3) Unter einer **CES-Funktion** versteht man eine Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$ , die für alle Variablenpaare  $x_j, x_k$  und alle Niveaus die gleiche konstante Substitutionselastizität hat (**Constant Elasticity of Substitution**). Dazu gehören außer den Funktionen in (1) und (2) noch weitere Funktionstypen, z.B. auf  $\mathbb{R}_{>0}^n$  die sog. **speziellen CES-Funktionen**

$$f_p(x_1, \dots, x_n) = b [a_0 + a_1 x_1^p + a_2 x_2^p + \dots + a_n x_n^p]^{1/p}$$

mit  $a_0 \geq 0$ ,  $a_j > 0$  für  $j = 1 \dots n$ ,  $b > 0$  und einem reellen Exponenten  $0 \neq p \neq 1$ . Die Niveaugleichung  $f_p(x_1, \dots, x_n) = y$  ist hier äquivalent mit

$$a_0 + a_1 x_1^p + a_2 x_2^p + \dots + a_n x_n^p = \left(\frac{y}{b}\right)^p,$$

also lauten die Substitutionsfunktionen

$$\begin{aligned} x_k(x_j) &= \left[ \frac{y^p b^{-p} - a_0}{a_k} - \frac{a_1}{a_k} x_1^p - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_k} x_{k-1}^p - \frac{a_{k+1}}{a_k} x_{k+1}^p - \dots - \frac{a_n}{a_k} x_n^p \right]^{1/p} \\ &= \left[ \text{const} - \frac{a_j}{a_k} x_j^p \right]^{1/p}, \end{aligned}$$

und mit der Substitutionsgrenzrate  $R = \left| \frac{dx_k}{dx_j}(x_j) \right| = \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(x) \Big/ \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(x) = \frac{a_j x_j^{p-1}}{a_k x_k (x_j)^{p-1}} > 0$  ergibt sich für den Quotienten

$$\frac{x_k(x_j)}{x_j} = \left( \frac{a_j}{a_k R} \right)^{\frac{1}{p-1}} = \left( \frac{a_k R}{a_j} \right)^{\frac{1}{1-p}}.$$

Als Funktion von  $R$  aufgefasst ist der Quotient  $x_k/x_j$  daher Vielfaches einer Potenzfunktion  $R^{1/(1-p)}$  und hat somit Elastizität  $\frac{1}{1-p}$ . Also gilt:

- Die spezielle CES-Funktion mit Exponent  $p \in \mathbb{R}_{\neq 0, \neq 1}$  hat konstante Substitutionselastizität  $\frac{1}{1-p}$ .

Für  $p = 1$  ist  $f_1(x) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  affin linear, die Niveaulinien in der  $(x_j, x_k)$ -Ebene sind Geraden, also gilt  $\frac{d^2 x_k}{dx_j^2} = 0$  und die Substitutionselastizitäten sind nicht definiert. Bei  $p \rightarrow 0$  strebt  $a^{-1/p} f_p(x)$  für  $a = a_0 + a_1 + \dots + a_n$  gegen das geometrische Mittel  $(a^0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n})^{1/a}$  (siehe 1.5), daher sind die Cobb-Douglas-Funktionen in einem gewissen Sinn der Grenzfall der speziellen CES-Funktionen bei Exponent  $p \rightarrow 0$ . Man kann zeigen (siehe das "CES-Theorem" unten), dass die vom Grad 1 homogenen positiven CES-Funktionen auf  $\mathbb{R}_{>0}^n$  mit negativen Substitutionsgrenzraten genau die oben angegebenen speziellen CES-Funktionen mit Koeffizient  $a_0 = 0$  sind. ■

CES-Funktionen und deren Grenzfall, die Cobb-Douglas-Funktionen (CD-Funktionen), werden in der Ökonomie vielfach als "Ansatzfunktionen" zur mathematischen Modellierung abhängiger ökonomischer Größen verwendet (Produktionsfunktionen, Nutzenfunktionen, ...). Ein tieferer Grund hierfür ist, dass diese Funktionen durch gewisse einfache Homogenitätseigenschaften und Elastizitätseigenschaften charakterisiert werden können, so dass naheliegende Annahmen über die ökonomischen Funktionen notwendigerweise auf CES- bzw. CD-Ansätze führen. Wir geben diese Charakterisierungen in den beiden folgenden — die Vorlesung abschließenden — Sätzen an und führen anschließend auch die



Beweise, weil diese selten und gelegentlich falsch präsentiert werden. Die Beweise sind aber recht anspruchsvoll und für ökonomische Anwendungen nicht wichtig; dafür genügt es, die Aussagen der Sätze zur Kenntnis zu nehmen. Wir setzen voraus, dass die betrachteten Funktionen  $f$  im Folgenden genügend oft differenzierbar sind.

**SATZ (“CD–Theorem”, Charakterisierung der Cobb–Douglas–Funktionen):**

Für Funktionen  $f: \mathbb{R}_{>0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit  $n \geq 2$  sind äquivalent:

(i)  $f$  ist eine Cobb–Douglas–Funktion, also von der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = c x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n} \quad (c > 0, s_j \in \mathbb{R});$$

(ii)  $f(x_1, \dots, x_n)$  ist partiell homogen (vom Grad  $s_j$ ) in jeder Variablen  $x_j$ ;

(iii) die partiellen Elastizitäten von  $f$  sind konstant (gleich  $s_j$ );

(iv) (unter der Zusatzvoraussetzung  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \neq 0$  für alle  $x$  und  $j$  und im Fall  $n = 2$  außerdem, dass  $f$  nicht homogen vom Grad 0 ist)

$f$  ist homogen (vom Grad  $s_1 + \dots + s_n$ ) mit konstanten impliziten Elastizitäten;

(v) (unter der weiteren Voraussetzung, dass alle Substitutionselastizitäten definiert sind)

$f$  ist homogen und alle Substitutionselastizitäten sind konstant gleich 1.

**SATZ (“CES–Theorem”; Charakterisierung der Funktionen mit konstanter Elastizität der Substitution):** Die vom Grad 1 homogenen positiven CES–Funktionen auf  $\mathbb{R}_{>0}^n$  ( $n \geq 2$ ) mit negativer Grenzrate der Substitution und mit konstanter Substitutionselastizität  $\neq 1$  sind genau die speziellen CES–Funktionen

$$f(x_1, \dots, x_n) = b [a_1 x_1^p + a_2 x_2^p + \dots + a_n x_n^p]^{1/p}$$

mit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_{>0}$  und Exponent  $p \in \mathbb{R}_{\neq 0, \neq 1}$ . Die entsprechenden vom Grad  $s \neq 0$  homogenen CES–Funktionen sind dann die Funktionen der Form  $f(x)^s$ .

*Beweis des CD–Theorems:* (i)  $\implies$  (ii) – (v) ergibt sich durch Nachrechnen (für (ii), (iii) sehr einfach, für (iv), (v) schon früher erledigt). (ii)  $\implies$  (i) ist einfach:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{s_1} f(1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{s_1} x_2^{s_2} f(1, 1, x_3, \dots, x_n) = \dots = c x_1^{s_1} x_2^{s_2} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n}$$

mit  $c = f(1, 1, \dots, 1)$ . (iii)  $\iff$  (ii) wissen wir aus der Differentialrechnung einer Veränderlichen: Die Elastizität einer Funktion von einer Variablen ist konstant, genau wenn es sich um ein Vielfaches einer Potenzfunktion handelt.

(iv)  $\implies$  (i): Wir bemerken zunächst, dass die Niveaulinien von  $f$  in jeder zur  $(x_j, x_k)$ –Ebene parallelen Ebene Graphen über beiden Achsen sind, weil die partiellen Ableitungen von  $f$  nach Voraussetzung keinen Vorzeichenwechsel haben, so dass  $f(x_1, \dots, x_n)$  von jeder Variablen streng monoton abhängt. Da nun die Substitutionsfunktion  $x_n(x_1)$  konstante Elastizität  $\frac{x_1}{x_n(x_1)} \frac{dx_n}{dx_1}(x_1) = t$  hat, ist  $x_n(x_1) x_1^{-t}$  konstant (nach  $x_1$  ableiten). Ist  $\mu_{x_n, x_1}^{(f; y)}$  konstant gleich  $t$ , so sind also alle Niveaulinien von  $f$  in Ebenen parallel zur  $(x_1, x_n)$ –Ebene durch Gleichungen der Form  $x_n x_1^{-t} = c$  gegeben und mit  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$  liegt daher  $(1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n x_1^{-t})$  in derselben Niveaumenge von  $f$ . Das bedeutet nun  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(1, x_2, \dots, x_n x_1^{-t})$ , wobei  $t \neq 0$  ist, weil  $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$  vorausgesetzt ist.

Dieselbe Argumentation auf die Substitutionsfunktion  $x_n(x_2)$  angewandt gibt die weitere Gleichung  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(1, 1, x_3, \dots, x_n x_1^{-t} x_2^{-t'})$  mit einem weiteren Exponenten  $t' \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ . So fortfahrend gelangen wir zu  $f(x_1, \dots, x_n) = f(1, \dots, 1, x_n x_{n-1}^{t_{n-1}} \cdot \dots \cdot x_1^{t_1})$  mit gewissen Exponenten  $t_j \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ . Da  $f$  homogen von einem Grad  $s$  vorausgesetzt ist, also Ersetzung von allen  $x_j$  durch  $rx_j$  den Funktionswert um den Faktor  $r^s$  ändert, muss  $f(1, \dots, 1, \xi)$  in der letzten Variablen  $\xi$  homogen vom Grad  $s/(t_1 + \dots + t_{n-1} + 1)$  sein. (Der Nenner kann hier nicht  $= 0$  sein, weil sonst  $f$  vom Grad Null homogen wäre. Das ist im Fall  $n = 2$  nach Voraussetzung ausgeschlossen. Im Fall  $n \geq 3$  wären die Niveaulinien Ursprungsstrahlen, die Exponenten  $t, t', \dots$  oben also alle gleich 1 und daher  $t_j = -1$  und  $t_1 + \dots + t_{n-1} + 1 = -(n-1) + 1 = 2 - n \neq 0$ .) Damit erhalten wir letztlich  $f(x_1, \dots, x_n) = cx_1^{s_1} \cdot \dots \cdot x_n^{s_n}$  mit  $c = f(1, \dots, 1)$  und mit den Exponenten  $s_j = st_j/(t_1 + \dots + t_{n-1} + 1)$  für  $1 \leq j < n$  und  $s_n = s/(t_1 + \dots + t_{n-1} + 1)$ .

Dass man in (iv) im Fall der Dimension  $n = 2$  die vom Grad 0 homogenen Funktionen ausschließen muss, zeigt  $f(x_1, x_2) = \varphi(x_1/x_2)$  mit einer streng monotonen Funktion  $\varphi$  ohne Ableitungsnullstelle. Die Niveaulinien sind dann Ursprungsstrahlen, die impliziten Elastizitäten also alle gleich 1, die partiellen Ableitungen von  $f$  verschwinden auch nütgens auf  $\mathbb{R}_{>0}^2$ , aber wenn man  $\varphi$  nicht als Vielfaches einer Potenzfunktion wählt, so ist  $f$  keine Cobb–Douglas–Funktion.

(v)  $\implies$  (i): Wir betrachten eine Substitutionsfunktion  $x_k(x_j)$ . Nach Voraussetzung lässt sich  $x_k/x_j$  als Funktion der Substitutionsrate  $R = |\frac{dx_k}{dx_j}|$  auffassen und hat als Funktion von  $R$  die konstante Elastizität 1. Das bedeutet  $\frac{x_k(x_j(R))}{x_j(R)} = \pm \beta R = \beta \frac{dx_k}{dx_j}$  mit einer Konstanten  $\beta \neq 0$  (weil  $x_j > 0$  und  $x_k > 0$  ist). Es folgt  $\frac{x_j}{x_k(x_j)} \frac{dx_k}{dx_j}(x_j) = \frac{1}{\beta}$ , also hat die Substitutionsfunktion konstante Elastizität  $\frac{1}{\beta}$ . Wie oben folgt daraus  $x_k(x_j) = a x_j^{1/\beta}$  mit einer weiteren Konstanten  $a > 0$ . Zu jeder Niveaulinie in der  $(x_j, x_k)$ –Ebene gibt es also Konstanten  $a > 0, \alpha \neq 0$ , so dass sie durch die Gleichung  $x_k x_j^{-\alpha} = a$  beschrieben ist. Anders als oben könnten hier die Konstanten  $a, \alpha$  aber vom Niveau und von den (fixierten) Werten der anderen Variablen  $x_i, j \neq i \neq k$ , abhängen. Die hauptsächliche Schwierigkeit des Beweises ist zu zeigen, dass solche Abhängigkeit tatsächlich nicht besteht.

Um die Notation zu vereinfachen, fixieren wir jetzt  $x_4, \dots, x_n$  (ohne diese Variablen zu notieren) und das Niveau  $y$ , so dass die Konstanten  $a, \alpha$  nur in Abhängigkeit von  $x_1, x_2, x_3$  untersucht werden. Auf der Niveaulinie  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_{>0}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = y\}$  gilt nun  $x_1 x_2^{-\alpha(x_3)} = a(x_3)$  sowie  $x_1 x_3^{-\beta(x_2)} = b(x_2)$  und drittens noch  $x_2 x_3^{-\gamma(x_1)} = c(x_1)$ . Es folgt  $x_1 = x_2^{\alpha(x_3)} a(x_3) = x_3^{\beta(x_2)} b(x_2)$  und  $\alpha(x_3) \ln x_2 + \ln a(x_3) = \beta(x_2) \ln x_3 + \ln b(x_2)$ . Differenziert man nach  $x_3$  und dann nach  $x_2$  (wenn  $f$  dreimal stetig differenzierbar ist, so lässt sich zeigen, dass dies möglich ist), so folgt  $\alpha'(x_3) \frac{1}{x_2} = \beta'(x_2) \frac{1}{x_3}$  bzw.  $x_3 \alpha'(x_3) = x_2 \beta'(x_2)$ . Da man  $x_2$  und  $x_3$  unabhängig voneinander in der Niveaulinie verändern kann (nach dem Satz über implizite Funktionen wegen  $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$ ), muss  $x_3 \alpha'(x_3) \equiv \kappa$  konstant sein und auch  $x_2 \beta'(x_2) \equiv \kappa$ , also gilt  $\alpha(x_3) = \kappa \ln x_3 + \mu$ ,  $\beta(x_2) = \kappa \ln x_2 - \nu$  mit gewissen Konstanten  $\mu, \nu$ . Einsetzen weiter oben gibt dann  $\mu \ln x_2 + \ln a(x_3) = -\nu \ln x_3 + \ln b(x_2)$  bzw.  $\ln a(x_3) - \nu \ln x_3 = \ln b(x_2) + \mu \ln x_2$ , so dass wieder folgt  $\ln a(x_3) - \nu \ln x_3 \equiv \rho$  konstant und  $\ln b(x_2) + \mu \ln x_2 \equiv \rho$ . Insgesamt erhält man  $x_1 = x_2^{\alpha(x_3)} a(x_3) = x_2^{\kappa \ln x_3 + \mu} e^{\rho + \nu \ln x_3}$ . Hier setzen wir  $x_2 = x_3^{\gamma(x_1)} c(x_1)$  ein und bekommen mit Logarithmieren:

$$\ln x_1 = \gamma(x_1) \kappa (\ln x_3)^2 + (\kappa \ln c(x_1) + \mu \gamma(x_1) + \nu) \ln x_3 + \mu \ln c(x_1) + \rho.$$

Diese Gleichung kann bei festem  $x_1$  und variierendem  $x_3$  (das geht in der Niveaumen-

ge, da man mit Änderung von  $x_2$  kompensieren kann) nur gelten, wenn die Koeffizienten vor  $(\ln x_3)^2$  und vor  $\ln x_3$  verschwinden. Insbesondere gilt also  $\kappa = 0$  und damit  $x_1 = x_2^\mu e^{\rho + \nu \ln x_3} = e^\rho x_2^\mu x_3^\nu$ . Resultat dieser Rechnungen ist also, dass  $\alpha(x_3) = \mu$  von  $x_3$  unabhängig ist und dass auf der Niveaufläche  $a(x_3) = e^\rho x_3^\nu$  gilt mit konstanten  $\rho, \nu$ .

Dies gilt nun analog aber auch für  $x_4, \dots, x_n$  statt  $x_3$ , also lautet die Gleichung der Niveaulinien in den Parallelen zur  $(x_1, x_2)$ -Ebene  $x_1 x_2^{-\mu} = e^\sigma x_3^{\nu_3} x_4^{\nu_4} \dots x_n^{\nu_n}$ , wobei nun alle Exponenten nur noch vom Niveau  $y$  abhängen. Weil ein analoges Resultat auch für die Niveaulinien in Parallelen zu anderen Koordinatenebenen gilt, folgt nun, dass die Niveaumenge von  $f$  zum Niveau  $y$  durch eine Gleichung  $x_1^{t_1(y)} x_2^{t_2(y)} \dots x_n^{t_n(y)} = e^{\sigma(y)}$  beschrieben wird. Dabei ist  $t_1(y) + \dots + t_n(y) \neq 0$ , sonst wären alle Ursprungsstrahlen Niveaulinien und die Substitutionelastizitäten nicht wie vorausgesetzt definiert. Aus demselben Grund ist auch der Homogenitätsgrad  $s$  von  $f$  nicht Null. Dann aber nimmt  $f$  das Niveau  $y = 1$  an, und mit  $t = t_1(1) + \dots + t_n(1)$ ,  $\vartheta = \sigma(1)$ ,  $s_j = s t_j(1)/t$ ,  $c = e^{-s\vartheta/t}$ ,  $r = e^{\vartheta/t} x_1^{-s_1/s} \dots x_n^{-s_n/s}$  folgt wegen der Gültigkeit der Niveaugleichung  $(r x_1)^{t_1(1)} \dots (r x_n)^{t_n(1)} = e^{\sigma(1)}$  zum Niveau 1 für  $(r x_1, \dots, r x_n)$  schließlich die Behauptung, mit der der Beweis des CD-Theorems beendet ist:

$$f(x_1, \dots, x_n) = r^{-s} f(r x_1, \dots, r x_n) = r^{-s} \cdot 1 = c x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}.$$

Wenn man in (iv) bzw. (v) die Homogenität von  $f$  nicht voraussetzt, so zeigt der Beweis immer noch, dass die Niveaumengen durch Gleichungen  $x_1^{t_1(y)} \dots x_n^{t_n(y)} = e^{\sigma(y)}$  mit Exponentensumme  $\neq 0$  beschrieben sind, also durch lineare Gleichungen für  $\ln x_1, \dots, \ln x_n$ . Weil  $f(x)$  für  $x \in \mathbb{R}_{>0}^n$  definiert ist, also  $(\ln x_1, \dots, \ln x_n)$  beliebig in  $\mathbb{R}^n$  variiert, und weil sich verschiedene Niveaumengen nicht schneiden, müssen die Koeffizientenvektoren  $(t_1(y), \dots, t_n(y))$  Vielfache  $\lambda(y)(s_1, \dots, s_n)$  desselben Vektors  $(s_1, \dots, s_n)$  mit  $s_1 + \dots + s_n \neq 0$  sein, so dass die Niveau-Gleichung auch  $x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} = e^{\sigma(y)/\lambda(y)}$  geschrieben werden kann. Daher ist dann  $f(x) = \varphi(x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n})$  Verkettung der streng monotonen Funktion  $\varphi$  mit  $\varphi^{-1}(y) = e^{\sigma(y)/\lambda(y)}$  und der CD-Funktion  $x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n}$ . Umgekehrt hat jede solche Verkettung dieselben Niveaumengen wie die CD-Funktion, also auch konstante implizite Elastizitäten und Substitutionelastizität konstant 1.

*Beweis des CES-Theorems:* Dass die speziellen CES-Funktionen zum Exponenten  $p$  konstante Substitutionelastizität  $\frac{1}{1-p}$  haben für  $p \in \mathbb{R}_{\neq 0, \neq 1}$ , haben wir schon früher vorgerechnet. Wir betrachten also nun  $f: \mathbb{R}_{>0}^n \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit konstanter Substitutionelastizität  $\sigma \neq 1$ . Bezüglich der Substitution von  $x_1$  durch  $x_2$  hat dann  $\frac{x_2(x_1(R))}{x_1(R)}$  als Funktion der Substitutionsgrenzrate  $R = \left| \frac{dx_2}{dx_1}(x_1(R)) \right|$  konstante Elastizität  $\sigma$ , also gilt  $\frac{x_2(x_1(R))}{x_1(R)} = \gamma R^\sigma = \gamma \left| \frac{dx_2}{dx_1}(x_1(R)) \right|^\sigma$  mit einer evtl. vom betrachteten Niveau  $y$  und von  $x_3, \dots, x_n$  abhängigen Konstanten  $\gamma > 0$ . Wir erhalten damit eine Differentialgleichung  $\frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = \pm \gamma^{-1/\sigma} \left( \frac{x_2(x_1)}{x_1} \right)^{1/\sigma}$ , die mit Trennung der Variablen gelöst werden kann (siehe 4.8):

$$\pm x_2(x_1)^{-1/\sigma} \frac{dx_2}{dx_1}(x_1) = \gamma^{-1/\sigma} x_1^{-1/\sigma} \iff \pm x_2(x_1)^{1-1/\sigma} = \gamma^{-1/\sigma} x_1^{1-1/\sigma} + \beta$$

mit einer weiteren evtl. von  $y, x_3, \dots, x_n$  abhängigen Konstanten  $\beta$ . Kürzen wir  $p = 1 - \frac{1}{\sigma}$  ab und nutzen die (ökonomisch sinnvolle) Voraussetzung negativer Substitutionsgrenzraten  $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$  aus, so ergibt sich als Gleichung der betrachteten Niveaulinie

$$x_1^p + a x_2^p = \alpha,$$

wobei  $a > 0$  und  $\alpha > 0$  evtl. von  $y, x_3, \dots, x_n$  abhängen, der Exponent  $p$  aber nicht (weil die Substitutionelastizität nach Voraussetzung auf allen Niveaulinien dieselbe ist).

Eine solche Gleichung bekommt man nun aber auch für alle Paare  $(x_j, x_k)$  mit  $j \neq k$ . Damit kann man zeigen, dass der Koeffizient  $a$  nur vom Niveau  $y$  abhängen kann. Dazu fixieren wir etwa  $x_4, \dots, x_n$  und verwenden die Gleichungen

$$x_1^p + a(x_3)x_2^p = \alpha(x_3), \quad x_1^p + b(x_2)x_3^p = \beta(x_2), \quad x_2^p + c(x_1)x_3^p = \gamma(x_1),$$

die für alle Punkte der Niveaufläche  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_{>0}^3 : f(x_1, x_2, x_3) = y\}$  simultan gelten. Aus den beiden ersten Gleichungen folgt  $a(x_3)x_2^p - \alpha(x_3) = b(x_2)x_3^p - \beta(x_2)$ , und mit Ableiten nach  $x_2$  und nach  $x_3$  ergibt sich  $a'(x_3)x_2^{p-1} = b'(x_2)x_3^{p-1}$ , also  $x_3^{1-p}a'(x_3) = x_2^{1-p}b'(x_2)$ . Da  $x_2$  und  $x_3$  unter Einhaltung des Niveaus unabhängig variiert werden können (wegen des Satzes über implizite Funktionen und  $\frac{\partial f}{\partial x_1} \neq 0$ , was aus  $\frac{dx_2}{dx_1} < 0$  folgt), muss  $x_3^{1-p}a'(x_3) \equiv p\kappa$  konstant sein und auch  $x_2^{1-p}b'(x_2) \equiv p\kappa$ , also  $a(x_3) = \kappa x_3^p + \mu$  und  $b(x_2) = \kappa x_2^p + \nu$ . Einsetzen in die obigen Gleichungen gibt  $\mu x_2^p - \alpha(x_3) = \nu x_3^p - \beta(x_2)$ , woraus wiederum folgt, dass  $\nu x_3^p + \alpha(x_3) \equiv \omega$  konstant ist und auch  $\mu x_2^p + \beta(x_2) \equiv \omega$ .

Damit lautet die erste Gleichung für die Niveaufläche  $x_1^p + (\kappa x_3^p + \mu)x_2^p = \omega - \nu x_3^p$ . Setzen wir hier  $x_2^p$  aus der dritten Gleichung ein, so folgt

$$x_1^p + (\kappa x_3^p + \mu)(\gamma(x_1) - c(x_1)x_3^p) = \omega - \nu x_3^p.$$

Diese quadratische Gleichung für  $x_3^p$  gilt nun bei festem  $x_1$  für variables  $x_3$  (weil das Niveau durch kompensierende Variation von  $x_2$  gehalten werden kann), und das ist offenbar nur bei  $\kappa = 0$  möglich. Somit hängt  $a(x_3) = \mu$  allenfalls vom Niveau  $y$  ab und es gilt  $\alpha(x_3) = \omega - \nu x_3^p$ . Dasselbe Argument auf  $x_4, \dots, x_n$  statt  $x_3$  angewandt zeigt, dass die Niveaumengen von  $f$  insgesamt durch eine Gleichung

$$(*) \quad a_1(y)x_1^p + a_2(y)x_2^p + \dots + a_n(y)x_n^p = \alpha(y)$$

beschrieben werden mit allein vom Niveau  $y$  abhängigen Koeffizienten  $a_j(y) > 0$  und  $\alpha(y) > 0$ . Ist nun  $f$  homogen von einem Grad  $s \neq 0$  (der Homogenitätsgrad darf nicht Null sein, weil sonst Ursprungsstrahlen Niveaulinien wären und die Substitutionselastizitäten undefiniert), so setzen wir  $a_j = a_j(1)$ ,  $\alpha = \alpha(1)$ ,  $r = \alpha^{1/p}(a_1x_1^p + \dots + a_nx_n^p)^{-1/p}$ , so erfüllt  $(rx_1, \dots, rx_n)$  die Gleichung zum Niveau 1, also folgt

$$f(x_1, \dots, x_n) = r^{-s}f(rx_1, \dots, rx_n) = r^{-s} \cdot 1 = \alpha^{-s/p} (a_1x_1^p + \dots + a_nx_n^p)^{s/p},$$

d.h.  $f$  ist die  $s$ -te Potenz einer speziellen CES-Funktion zum Exponenten  $p$ .

Wenn keine Homogenität von  $f$  vorausgesetzt ist, so zeigt der Beweis immer noch, dass die Niveaumenge von  $f$  zum Niveau  $y$  durch eine Gleichung der Form  $(*)$  mit evtl. von  $y$  abhängigen  $a_1(y), \dots, a_n(y), \alpha(y) \in \mathbb{R}_{>0}$  gegeben ist. Umgekehrt hat jede Funktion mit solchen Niveaumengen konstante Substitutionselastizität  $\frac{1}{1-p}$ , weil jede ihrer Niveaumengen ja auch eine Niveaumenge einer speziellen CES-Funktion zum Exponenten  $p$  ist. Weil hier  $(x_1^p, \dots, x_n^p)$  nur  $\mathbb{R}_{>0}^n$  und nicht ganz  $\mathbb{R}^n$  durchläuft, folgt aber nicht, dass alle Koeffizientenvektoren  $(a_1(y), \dots, a_n(y))$  Vielfache desselben Vektors sind, und deshalb muss  $f$  auch nicht Verkettung einer streng monotonen Funktion mit einer speziellen CES-Funktion sein. Zum Beispiel hat  $f(x_1, x_2) = x_2^p + \sqrt{x_2^{2p} + x_1^p}$  die Niveaugleichungen  $x_1^p + 2yx_2^p = y^2$ , ist also CES-Funktion, aber nicht Verkettung einer monotonen Funktion mit einer speziellen CES-Funktion zum Exponenten  $p \in \mathbb{R}_{\neq 0, \neq 1}$ .

Damit beenden wir die Diskussion des CES-Theorems (und auch das Skript zu dieser Vorlesung).