Analysis I
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Christian Gesse

WS 2022/23

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 (3+3 Punkte)

(a) Es seien I und M nichtleere Mengen und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Teilmenge von M. Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$M \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} M_i \Big) = \bigcap_{i \in I} (M \setminus M_i).$$

(b) Geben Sie ein konkretes Beispiel für M, I und $M_i, i \in I$ an, sodass die Gleichheit aus (a) erfüllt ist.

Aufgabe 2.2 (6 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (m, n) \longmapsto f(m, n) := 2^{m-1}(2n-1) \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

und zeigen Sie, dass f bijektiv ist.
Hinweis: Sie können ohne Beweis die folgende Tatsache verwenden: Eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ ist genau dann ungerade, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $N = 2n - 1$.

Aufgabe 2.3 (2+2+2 Punkte)
Folgern Sie ausschließlich aus den Axiomen (A1)-(A4), (M1)-(M4), (D), (O1)-(O3) und den in der Vorlesung bewiesenen Aussagen:

(i) $\forall a, c \in \mathbb{R} \quad \forall\, b, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc.$

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (binomische Formel).

(iii) Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ gilt $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Abgabe bis zum Mittwoch, den 02. November 2022, 10.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 04. November 2022, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.