

Übungsblatt 3

Aufgabe 3.1 (2+4 Punkte)

(i) Berechnen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$ für die Abbildungen

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} n + 1 & : n \text{ ungerade} \\ n - 1 & : n \text{ gerade} \end{cases}, \quad g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} n - 1 & : n \text{ ungerade} \\ n + 1 & : n \text{ gerade} \end{cases}.$$

(ii) Seien A, B, C Mengen sowie $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ bijektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass $g \circ f : A \rightarrow C$ bijektiv ist und dass $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ gilt.

Aufgabe 3.2 (6 Punkte)

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a \leq b$. Zeigen Sie:

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b} \right)^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq b^2.$$

Zeigen Sie zusätzlich: trifft an irgendeiner Stelle dieser Ungleichungskette das Gleichheitszeichen zu, so ist $a = b$.

Aufgabe 3.3 (3+3 Punkte)

(i) Zeigen Sie: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x + y| + |x - y| \geq |x| + |y|$.

(ii) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2$ für die $\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{1+|x-1|}$ gilt.

Abgabe bis zum Dienstag, den 08. November 2022, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 11. November 2022, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.