

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1 (3+3 Punkte)

Bestimmen Sie, falls vorhanden, das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum folgender Teilmengen von \mathbb{R} :

(i) $A = \left\{ \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

(ii) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x + 1)^2 + 5y^2 < 4\}$.

Aufgabe 4.2 (4+2 Punkte)

Seien X und Y nichtleere beschränkte Teilmengen von \mathbb{R} mit $X \subset Y$.

- (i) Zeigen Sie $\sup X \leq \sup Y$ und $\inf Y \leq \inf X$.
- (ii) Existieren zwei Mengen X und Y mit $X \neq Y$ und $\sup X = \sup Y$ sowie $\inf Y = \inf X$? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. ein Beispiel an.

Aufgabe 4.3 (3+3 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

- (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt: $3^n > 7n^2$.
- (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

Abgabe bis zum Dienstag, den 15. November 2022, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 18. November 2022, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.