Analysis I
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Christian Gesse

WS 2022/23

Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 (4+2 Punkte)

Für festes $m, n \in \mathbb{N}_0$ definiere man $s_n^{(m)} := \sum_{k=1}^n k^m$.

(i) Beweisen Sie nun, dass für beliebige $p, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{m=0}^{p} \binom{p+1}{m} s_n^{(m)} = (n+1)^{p+1} - 1.$$

Hinweis: Wählen Sie $p \in \mathbb{N}_0$ fest und führen Sie eine vollständige Induktion über n durch. Denken Sie außerdem an den Binomischen Lehrsatz!

(ii) Berechnen Sie Darstellungsformeln von $s_n^{(0)}$, $s_n^{(1)}$ und $s_n^{(2)}$ unter Verwendung von Teil (i).

Aufgabe 5.2 (2+2+2 Punkte)

(i) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:
(a) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$, (b) $(1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

(ii) Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine beliebige komplexe Zahl. Stellen Sie folgende Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar:
(a) $z + (\overline{z})^{-1}$, (b) $\overline{z}^2 + \frac{1}{z^2}$.

(iii) Beweisen Sie: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

Aufgabe 5.3 (2+4 Punkte)

(i) Seien A, B, C nichtleere Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ surjektive Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Verkettung $g \circ f : A \to C$ surjektiv ist.

(ii) Seien A und B nichtleere abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass $A \times B$ abzählbar ist.
Hinweis: Denken Sie an Übungsaufgabe 2.2.

Abgabe bis zum Dienstag, den 22. November 2022, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 25. November 2022, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.