Analysis I
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Christian Gesse

WS 2022/23

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 (1+2+1+2 Punkte)
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz für $n \to \infty$ und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

(i)	$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,	(ii)	$a_n := \sqrt[n]{n}$,
(iii)	$a_n := \frac{2n^2+n^{1/2}}{n^{1/3}-1+n^2}$,	(iv)	$a_n := \sqrt[n]{n+7}$.

Hinweis: Sie dürfen für die gesamte Aufgabe die Aussagen aus Satz 3.13 nutzen. Betrachten Sie bei (ii) die Folge $x_n := a_n - 1$ und nutzen Sie den binomischen Lehrsatz, um aus $n = a_n^n = (1 + x_n)^n$ zu folgern, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 6.2 (2+2+2 Punkte)
Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_1 := 2$, $a_{n+1} := 4 - \frac{3}{a_n}$ für $n > 1$.

(i) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist und geben Sie die obere und untere Schranke an.

(ii) Zeigen Sie, dass die Folge monoton wachsend ist.

(iii) Entscheiden Sie, ob die Folge konvergiert, und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.3 (2+2+2 Punkte)
Seien $\alpha, a, b \in \mathbb{R}$ und seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage *falsch* ist:

(i) $|a_n| \to |a| \quad (n \to \infty) \;\Rightarrow\; a_n \to a \quad (n \to \infty)$.

Beweisen Sie außerdem folgende Aussagen: Falls $a_n \to a$, $b_n \to b$ für $n \to \infty$, dann gelten:

(ii) $a_n + b_n \to a + b \;\; (n \to \infty)$;

(iii) $\alpha a_n \to \alpha a \;\; (n \to \infty)$.

Abgabe bis zum Dienstag, den 29. November 2022, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 02. Dezember 2022, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.