Analysis I
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Christian Gesse

WS 2022/23

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1 (6 Punkte)
Seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Zahlenfolgen. Zeigen Sie, dass die durch $c_{2n-1} := a_n$ und $c_{2n} := b_n$ definierte Folge (c_n) genau dann konvergiert, wenn die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren und denselben Grenzwert haben.

Aufgabe 7.2 (6 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} a_n \to a \qquad \text{für } m \to \infty.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis die folgende Dreiecksungleichung verwenden: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ ist $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Aufgabe 7.3 (2+3+1 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

(i) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(ii) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ divergiert.

(iii) Warum ist (ii) kein Widerspruch zu Satz 3.31?

Abgabe bis zum Dienstag, den 06. Dezember 2022, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 09. Dezember 2022, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.