

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 (1+1+1+1+1+1 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{a} - 1)^k \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0), & \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^2 - 3k + 7}, \\ \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^3}{(k^2 + 1)^{4/3}}, & \text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}), \\ \text{(e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, & \text{(f)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4}{3^k}. \end{array}$$

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)

Es sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeben. Zeigen Sie: Erfüllt die Reihe die Voraussetzungen des Quotientenkriteriums (Satz 3.38), so erfüllt sie auch die Voraussetzungen des Wurzelkriteriums (Satz 3.37). Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Umkehrung falsch ist.

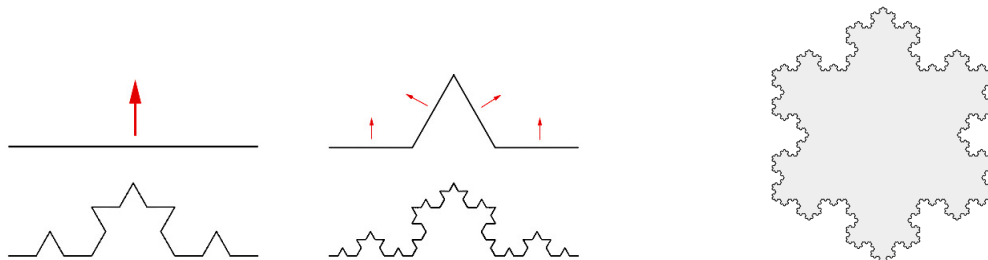
Bitte wenden für die Weihnachtsaufgabe!

Aufgabe 8.3 (2+4+2 Punkte)

Frau Holle hat ihr Rezept für Schneeflocken verloren. Helfen Sie ihr!

Die *Koch'sche Schneeflocke* ist gegeben durch folgende Konstruktion:

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck. Im ersten Schritt teilt man jede Seite in drei gleich lange Streckenstücke und setzt auf das mittlere Streckenstück ein gleichseitiges Dreieck dessen Seiten jeweils so lang sind wie jeweils die drei Teilstrecken der Ausgangsseite. Im zweiten Schritt wiederholt man dies auf jedem neu entstandenen Streckenstück, vgl. Abbildungen. Der Grenzwert der entstehenden Figurenfolge wird als Koch'sche Schneeflocke bezeichnet.



- (i) Zeigen Sie: Die Koch'sche Schneeflocke besitzt keinen endlichen Umfang.
- (ii) Zeigen Sie: Die Koch'sche Schneeflocke besitzt einen endlichen Flächeninhalt. Berechnen Sie diesen.
- (iii) Malen Sie ein (Weihnachts-) Bild, in dem eine Iteration (mindestens nach dem zweiten Schritt oder höher) der Koch'schen Schneeflocke auftaucht. Hierbei sind Ihrer Kreativität keine Grenzen gesetzt.

Die fünf kreativsten Lösungen (unter der Bedingung, dass (i) und (ii) auch bearbeitet wurden) werden in der letzten Vorlesung vor Weihnachten am 23. Dezember mit hausgemachtem Gebäck prämiert.

Bitte inkludieren Sie das Bild aus Aufgabenteil (iii) in Ihre PDF-Abgabe. Wenn Sie auch die Chance auf hausgemachtes Gebäck haben möchten, so geben Sie Ihr Bild bitte zusätzlich(!) in analoger Form auf einem Blatt Papier in den Übungsgruppen vom 13. Dezember bis zum 15. Dezember ab.

Abgabe bis zum Dienstag, den 13. Dezember 2022, 14.00 Uhr über das Ilias-System.

Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 16. Dezember 2022, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.