Analysis I
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Christian Gesse

WS 2022/23

Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1 (2+2+2+3 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien r der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(i)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^k}\, x^k, \qquad \text{(ii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{2^k+1}\, x^{2k},$$

$$\text{(iii)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k2^k}{(1+k^2)^2}\, x^k, \qquad \text{(iv)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\, x^k.$$

Entscheiden Sie bei (iv) zusätzlich, ob Konvergenz in $x = \pm r$ vorliegt.

Aufgabe 9.2 (3+2 Punkte)

(i) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge nichtnegativer Glieder. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

(ii) Für $s > 1$ ist die *Riemann'sche Zetafunktion* gegeben als $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Zeigen Sie als Anwendung von (i), dass die Reihe für $s > 1$ konvergiert und für $s \leq 1$ divergiert.

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass $s \in \mathbb{Q}$, da Potenzen mit reellen Zahlen noch nicht eingeführt wurden.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Cauchy-Produkt der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ mit sich selbst divergiert. Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 3.56?

Abgabe bis zum Dienstag, den 20. Dezember 2022, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 23. Dezember 2022, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.