Analysis I
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Christian Gesse

WS 2022/23

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 (3+3 Punkte)
Beweisen Sie Satz 4.14 der Vorlesung:

(1) Der Schnitt (beliebig vieler) abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

(2) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Aufgabe 10.2 (2+2+2 Punkte)
Gegeben seien folgende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$M_1 = \left\{ (-1)^n + \left(-\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \ n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad M_2 = \left\{ \frac{m}{2^n} : \ m, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad M_3 = \mathbb{N}.$$

Was ist jeweils die Menge der Häufungspunkte? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 10.3 (6 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & : x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}, \\ \frac{1}{q} & : x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \text{ wobei } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums, dass f in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.
Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis und denken Sie an den Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 3.22).

Abgabe bis zum Dienstag, den 10. Januar 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 13. Januar 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!