

Übungsblatt 12

Hinweis: Sie dürfen auf dem gesamten Blatt ohne Beweis folgende Tatsachen verwenden:

- (1) \sin und \cos sind auf \mathbb{R} differenzierbar mit $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.
- (2) Es gilt $|\sin(x)|, |\cos(x)| \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12.1 (2+4 Punkte)

(i) Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2}, & \text{falls } x \notin \mathbb{N}, \\ \frac{4x-6}{x+1}, & \text{falls } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Stellen an denen f stetig beziehungsweise unstetig ist.

(ii) Berechnen Sie jeweils die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen und begründen Sie, warum die Funktion jeweils differenzierbar ist:

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^x, \quad x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto x(f) = \cos(\sin(f^2)).$$

Aufgabe 12.2 (3+3 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

- (i) f ist differenzierbar auf \mathbb{R} .
- (ii) f' ist stetig auf \mathbb{R} .

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x} \cdot x^{-m} = 0$.

Aufgabe 12.3 (3+3 Punkte)

Zeigen Sie anhand des Mittelwertsatzes:

- (i) Für $x, y \leq 0$ gilt $|\cos(e^y) - \cos(e^x)| \leq |y - x|$.
- (ii) Für $x > 0$ gilt $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.

Abgabe bis zum Dienstag, den 24. Januar 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.

Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 27. Januar 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5D statt.