Analysis I
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Christian Gesse

WS 2022/23

Präsenzblatt 2

Präsenzaufgabe 2.1

Es seien I und M nichtleere Mengen und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Teilmenge von M. Wir setzen wie in der Vorlesung

$$\bigcup_{i\in I} M_i := \big\{x \in M \ : \exists\, i \in I : \quad x \in M_i\big\}, \qquad \bigcap_{i\in I} M_i := \big\{x \in M \ : \forall\, i \in I : \quad x \in M_i\big\}.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung gilt:

$$M \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} M_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(M \setminus M_i).$$

Präsenzaufgabe 2.2

Für Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ sei

$$f : A \to B, \quad x \mapsto \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x & : x < 0 \end{cases}.$$

In welchem der folgenden Fälle ist f injektiv, surjektiv, bijektiv? Formulieren Sie jeweils eine Behauptung für die drei Eigenschaften und beweisen Sie diese.

(i) $A := [0, 1]$ und $B := [0, 1]$.

(ii) $A := [0, 1]$ und $B := [-1, 1]$.

Hinweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ wie folgt definiert:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Präsenzaufgabe 2.3

(i) Zeigen Sie die folgenden Aussagen von Lemma 2.2:

  (a) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Das zu a inverse Element $\overline{a}$ bzgl. der Multiplikation ist eindeutig. Dieses sei mit $\overline{a} =: a^{-1} =: \frac{1}{a}$, der reziproken Zahl zu a, bezeichnet.

  (b) Für je zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$, nämlich $x = a^{-1}b =: \frac{b}{a}$.

(ii) Folgern Sie ausschließlich aus den Axiomen (A1)-(A4), (M1)-(M4), (D) und den in der Vorlesung bewiesenen Aussagen:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen vom Dienstag, den 25. Oktober bis Donnerstag, den 27. Oktober 2022 bearbeitet.