Analysis I
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christiane Bui
Christian Gesse

WS 2022/23

Präsenzblatt 4

Präsenzaufgabe 4.1

Bestimmen Sie, falls vorhanden, das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum folgender Teilmenge von $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n} \,|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Präsenzaufgabe 4.2

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgenden Aussagen:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1.$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Präsenzaufgabe 4.3

Begründen Sie, warum der untenstehende *Beweis* falsch ist:

Satz: Alle Pferde haben dieselbe Farbe.

Beweis: (per Induktion über Pferdegruppen der Größe $n \in \mathbb{N}$)
Induktionsanfang (n=1): Es ist offensichtlich, dass in einer Menge mit nur einem Pferd alle Pferde in dieser Menge dieselbe Farbe haben.
Induktionsschritt ($n \geq 1$, $A(n) \Rightarrow A(n+1)$): Aufgrund der Induktionsvoraussetzung dürfen wir annehmen, daß bereits in jeder Menge von n Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben. Betrachten wir nun eine Menge von $n+1$ Pferden. Durch Aussondern eines Pferdes erhalten wir eine Menge von n Pferden, die - aufgrund der Induktionsvoraussetzung - alle dieselbe Farbe haben. Fügen wir das ausgesonderte Pferd wieder hinzu und nehmen ein anderes Pferd heraus, so haben auch in dieser n-elementigen Teilmenge alle Pferde dieselbe Farbe. Das ursprünglich herausgenommene Pferd hat also die gleiche Farbe wie die restlichen Pferde in der Gruppe. Daher müssen alle $n+1$ Pferde dieselbe Farbe besitzen. $\square$

Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen vom Dienstag, den 08. November bis Donnerstag, den 10. November 2022 bearbeitet.