

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1 (3+3 Punkte)

Seien $a > 1$ und $Z_n = \{1 = a^0, a^{1/n}, a^{2/n}, \dots, a^{n/n} = a\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[1, a]$

- (a) Zeigen Sie, dass $|I_j^n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) für jedes durch Z_n induzierte Teilintervall $I_j^n = [a^{(j-1)/n}, a^{j/n}]$ und $j = 1, \dots, n$.
- (b) Bestimmen Sie das Integral $\int_1^a 1/x \, dx$ mit Hilfe der Ober- und Untersummen zu Z_n .

Hinweis: Zu (b): $n(a^{1/n} - 1) \rightarrow \log(a)$ ($n \rightarrow \infty$).

Aufgabe 1.2 (3+3 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$(a) \int e^x \sin(x) \, dx, \quad (b) \int \frac{2x}{\tan(x^2)} \, dx.$$

Aufgabe 1.3 (3+3 Punkte)

- (a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) = 0$ im Intervall $(0, \pi)$ mindestens eine Lösung hat.

- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung:

$$0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)^5}{\sqrt{1+x^2}} \, dx \leq \operatorname{arsinh}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Abgabe bis zum Dienstag, den 18. April 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
 Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 21. April 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium in Hörsaal 5K statt.