

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1 (3+3 Punkte)

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der folgenden Abbildungen und untersuchen Sie jeweils auf Differenzierbarkeit:

(i) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$,

(ii) $h: (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie hier außerdem $\det(J_h(r, \varphi, \theta))$.

Aufgabe 4.2 (3+3 Punkte)

(i) Berechnen Sie $f'(x, y)$, $g'(u, v)$ und $(g \circ f)'(x, y)$ für alle $x, y, u, v \in \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}, \quad g(u, v) = \begin{pmatrix} u^3 - 3uv^2 \\ 3u^2v - v^3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(0, 0) = 0$ und

$$f(x, y) = \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ((x, y) \neq (0, 0)).$$

Ist f im Nullpunkt $(0, 0)$ differenzierbar? Für welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ existieren die Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$?

Aufgabe 4.3 (3+3 Punkte)

(i) Zeigen Sie: Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann ist f positiv homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h.

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

genau dann, wenn die Eulersche Homogenitätsrelation $\nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ erfüllt ist.

Hinweis: Differenzieren Sie nach t .

(ii) Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar und $\partial_x f, \partial_y f$ beschränkt auf U . Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (in einer Variablen).

Abgabe bis zum Dienstag, den 09. Mai 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.
 Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 12. Mai 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium
 in Hörsaal 5K statt.