

## Übungsblatt 10

Sommersemester 2023

### Aufgabe 10.1 (2+2+2 Punkte)

Beweisen Sie Satz 6.11 der Vorlesung:

- (i) Die exp-Reihe ist normkonvergent, d.h. es gilt  $\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| < \infty$  und damit konvergent. Es gilt  $\exp(0) = I_n$  ( $n \times n$ -Einheitsmatrix) und  $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$ .
- (ii) Für  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $AB = BA$  gilt  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ .
- (iii) Durch  $Z(t) := \exp(tA)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) ist die eindeutige Lösung der Matrix-Dgl.  $Z'(t) = AZ(t)$  mit  $Z(0) = I_n$  gegeben. Eine Funktion  $y \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^n)$  ist genau dann eine Lösung der Dgl.  $y'(t) = Ay(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), falls ein  $c \in \mathbb{C}^n$  existiert mit  $y(t) = \exp(tA)c$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

### Aufgabe 10.2 (1+1+1+1+2 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) + b(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(0) = y_0,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von  $A$ .
- (ii) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte von  $A$ .
- (iii) Entscheiden Sie, ob  $A$  diagonalisierbar ist.
- (iv) Bestimmen Sie  $e^{tA}$  für  $t \in \mathbb{R}$ .
- (v) Bestimmen Sie mit Hilfe der Variation der Konstanten eine Lösung zu obigem Anfangswertproblem.

### Aufgabe 10.3 (3+3 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Anfangswertproblem

$$y'(t) = Ay(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \quad y(0) = y_0,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem  $(z_1(t), z_2(t))$  der homogenen Gleichung.
- (ii) Bestimmen Sie eine Lösung zu obigem Anfangswertproblem.

Abgabe bis zum Dienstag, den 20. Juni 2023, 14.00 Uhr über das Ilias-System.  
 Die Besprechung der Aufgaben findet am Freitag, den 23. Juni 2023, um 14.30 Uhr im Tutorium  
 in Hörsaal 5K statt.