Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Asymptotik semi- und quasilinearer Probleme
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2021/22

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1

Finden sie möglichst schwache Voraussetzungen an u, sodass

$$(\partial_t u, u)_{H_\sigma^{-1} \times H_{0,\sigma}^1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_2^2$$

gilt (vgl. Abschnitt 1.2 im Skript).
Hinweis: Im Skript wurde bereits angegeben, dass sich die obige Gleichheit für

$$u \in H^1(J, H_\sigma^{-1}(\Omega)) \cap L^2(J, H_{0,\sigma}^1(\Omega))$$

verifizieren lässt.

Aufgabe 1.2

Betrachten Sie den Stokes-Operator $\mathcal{A}_\sigma$ in $H_\sigma^{-1}(\Omega)$ aus Abschnitt 1.3 im Skript. Zeigen Sie, dass $-\mathcal{A}_\sigma|_{L_\sigma^2(\Omega)} = A_\sigma$, wobei A_σ den bekannten Stokes-Operator auf $L_\sigma^2(\Omega)$ darstellt.

Aufgabe 1.3

Betrachten Sie die Störung $\mathcal{V}$ aus Abschnitt 1.3 des Skriptes für ein $v \in L^\infty(J, L^\infty(\Omega)) \cap L^p(J, H_{0,\sigma}^1(\Omega))$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\mu > 0$ gibt, sodass

$$\|\mathcal{V}u\|_{L^p(J, H_\sigma^{-1}(\Omega))} \leqslant \varepsilon \|(\mu + \mathcal{A}_\sigma)u\|_{L^p(J, H_\sigma^{-1}(\Omega))}$$

Hinweis: Schätzen Sie $(v \cdot \nabla)u$ für $u \in L^p(J, H_{0,\sigma}^1(\Omega))$ entsprechend ab.
Zeigen Sie dazu zunächst, dass sich der Störungsterm auch als $\mathrm{div} u \otimes v$ schreiben lässt und dass $\mathrm{div} \in \mathscr{L}(L^2(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n}), H_\sigma^{-1}(\Omega))$. Dabei ist für eine $n \times n$-wertige Funktion v die Divergenz wie folgt definiert:

$$\mathrm{div} v := \left(\mathrm{div}\left(v^{ij}\right)_{j=1}^n\right)_{i=1}^n$$

Ergänzen Sie anschließend an passender Stelle ein $\mathrm{Id} = (\mu + \mathcal{A}_\sigma)^{-1}(\mu + \mathcal{A}_\sigma)$, um eine geeignete Abschätzung zu erhalten.

Das Blatt wird in der Übung am Freitag, den 29. Oktober 2021 um 14.30 Uhr besprochen.