Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

Seien E, E_0, E_1 Banachräume mit $E_1 \overset{k}{\hookrightarrow} E \hookrightarrow E_0$. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $C_\delta > 0$ mit

$$\|x\|_E \leqslant \delta \|x\|_{E_1} + C_\delta \|x\|_{E_0}.$$

Hinweis: Nutzen Sie einen Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 2.2

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))'$ und $H_0^{-1}(\Omega) := (H^1(\Omega))'$. Zeigen Sie:

(i) $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

(ii) Der Ableitungsoperator $\partial_j : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ besitzt eine konsistente Fortsetzung auf $H^{-1}(\Omega)$.

(iii) Es gilt $H_0^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, aber nicht $H_0^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$.

Hinweis: Denken Sie daran, dass $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$, aber i.A. nicht dicht in $H^1(\Omega)$ liegt.

Das Blatt wird in der Übung am Freitag, den 05. November 2021 um 14.30 Uhr besprochen.